◎ “十二五”国家重点图书出版规划项目

工业机器人技术

Industrial Robotic Technology

杨晓钧 李 兵 编 著



“十二五”国家重点图书出版规划项目

工业机器人技术

杨晓钧　李　兵　编著

哈爾濱工業大學出版社

内容提要

本书内容包括绪论、空间描述与变换、机器人正逆运动学、速度与雅可比矩阵、刚体一般运动及螺旋、关节轨迹规划、机器人动力学和机器人控制。本书还编写了部分动力学及控制仿真程序，让读者对书中技术的应用有直观的认识。

书中结合作者多年在工业机器人方向的教学和科研经验，深入浅出地探讨了工业机器人分析与应用相关的方法与技术，有助于使读者从中得到启发和借鉴。本书可供机械工程领域从事机器人研究的研究生、教师和科技人员阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

工业机器人技术/杨晓钧，李兵编著. —哈尔滨：
哈尔滨工业大学出版社，2015.8
ISBN 978-7-5603-5247-3

Ⅰ.①工… Ⅱ.杨齐…②李… Ⅲ.①工业机器人
Ⅳ.①TP242.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 032501 号

策划编辑　王桂芝
责任编辑　刘　瑶
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 11.75　字数 283 千字
版　　次　2015 年 8 月第 1 版　2015 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5247-3
定　　价　28.00 元

前　言

从20世纪60年代以来,机器人技术的研究及应用得到了迅猛发展,目前机器人已经广泛应用于焊接、喷涂、搬运及装配等工业生产中,并在医疗、国防、家庭、娱乐及特种应用场合发挥着重要作用。机器人技术是一门综合性的工程学科,涉及面很宽泛包括机械学、力学、计算机、电子、信息与控制等多学科的知识。本书以作者在机构学领域的教学与科研成果为基础,借鉴国内外同行的经典研究成果,特别侧重于机器人技术中的运动学、动力学与控制等内容。

全书共8章:第1章是机器人技术基础,介绍机器人技术发展的历程,工业常用机器人的结构与特点及基本概念等;第2章描述三维空间中物体的位置与方向,以易于理解的直观的方式,建立机械臂各部件之间,或者与其周围空间的部件、工具之间的位置与方向的关系,是机器人技术的基础和重点;第3章引入机构运动学中D-H方法,分析机械臂坐标系的建立方法,坐标系之间的齐次变换矩阵,进而研究典型结构的机械臂的正运动学以及逆运动学求解的几何与代数法;第4章研究一般刚体的速度问题,进而扩展到机械臂速度雅可比矩阵的建立与分析;第5章研究刚体的一般运动及螺旋,分析总结刚体螺旋运动和力螺旋表示形式的来龙去脉及其蕴含的物理意义;第6章研究工业机器人关节轨迹规划常用的基本方法;第7章研究工业机器人静力学,进而研究多刚体动力学牛顿-欧拉方程,拉格朗日一类、二类及欧拉-拉格朗日方程在工业机器人动力学建模中的应用;第8章研究工业机器人的控制问题,包括独立关节控制与计算力矩控制。

本书结合工业机器人动力学模型的建立与控制方法,编写了部分仿真程序,为读者学习机器人技术的控制方法与仿真提供了例程。

本书具体编写分工如下:第1~5章由杨晓钧撰写,第6~8章由李兵撰写。硕士生钟春号绘制了书中部分图片,博士生宋振东核对了书中部分公式的推导过程,博士生王帅、硕士生刘俊伟做了部分文字修订工作。

感谢哈尔滨工业大学深圳研究生院机电工程与自动化学院、先进设计与制造中心杜建军、杨小平、徐文福及陈明等老师的支持。

限于作者水平,书中难免有不妥及疏漏之处,恳请读者指正。

作　者
2015年3月

目　　录

第1章　绪　论 ······ 1
1.1　引言 ······ 1
1.2　工业机器人概述 ······ 2
1.2.1　机器人系统的基本组成 ······ 2
1.2.2　工业机器人常见的结构 ······ 3
1.3　基本概念及其定义 ······ 6
1.3.1　机器人的自由度与活动度 ······ 6
1.3.2　运动副或关节 ······ 6
1.3.3　运动链 ······ 7
1.3.4　机构 ······ 7
1.3.5　笛卡儿坐标系和广义坐标 ······ 8
1.3.6　位形空间 ······ 8
1.3.7　工作空间 ······ 11
1.3.8　额定速度与额定负载 ······ 11
1.3.9　精度 ······ 11
本章小结 ······ 13
第2章　空间描述与变换 ······ 14
2.1　机器人坐标系统 ······ 14
2.2　位置和姿态的表示 ······ 17
2.2.1　位置的描述 ······ 18
2.2.2　姿态的描述 ······ 19
2.3　点在不同坐标系下的映射 ······ 21
2.3.1　平移映射 ······ 21
2.3.2　旋转映射 ······ 21
2.3.3　复合映射 ······ 22
2.3.4　齐次矩阵的逆 ······ 23
2.4　齐次坐标变换 ······ 24
2.4.1　平移变换 ······ 24
2.4.2　旋转变换 ······ 25
2.5　刚体的旋转 ······ 29
2.5.1　欧拉角表示法 ······ 29

2.5.2 一般的旋转变换 …… 32
2.5.3 Euler-Rodrigues 参数 …… 34
本章小结 …… 36
第3章 机器人正逆运动学 …… 37
3.1 机器人运动链描述 …… 37
3.2 机器人运动 D-H 表示法 …… 38
3.2.1 D-H 参数的几何意义 …… 38
3.2.2 D-H 坐标系的建立 …… 39
3.2.3 D-H 参数表的建立 …… 40
3.2.4 D-H 坐标系之间的齐次变换 …… 42
3.3 机器人正运动学 …… 44
3.4 机器人逆运动学 …… 48
3.4.1 平面 3R 机械臂逆解 …… 49
3.4.2 空间 6R 机械臂逆解 …… 51
本章小结 …… 57
第4章 速度与雅可比矩阵 …… 58
4.1 刚体的运动速度与加速度 …… 58
4.1.1 刚体上点的速度和加速度分析 …… 58
4.1.2 点相对于刚体移动速度与加速度分析 …… 61
4.2 串联工业机械臂速度分析 …… 62
4.2.1 微分方法 …… 62
4.2.2 几何方法 …… 64
4.2.3 雅可比矩阵的变换 …… 71
4.2.4 关节速率的求解 …… 72
4.2.5 奇异位形分析 …… 73
4.2.6 机器人性能指标 …… 75
本章小结 …… 78
第5章 刚体一般运动及螺旋 …… 79
5.1 空间直线的 Plücker 坐标 …… 79
5.2 刚体的一般运动 …… 80
5.3 刚体的一般瞬时运动 …… 82
5.4 刚体的运动螺旋 …… 83
5.5 机构中连杆基本的瞬时运动 …… 84
5.5.1 连杆的瞬时转动 …… 84
5.5.2 连杆的瞬时移动 …… 85
5.5.3 连杆的瞬时螺旋运动 …… 85
5.5.4 机械臂的运动螺旋 …… 86
5.6 螺旋代数运算 …… 87

5.7　刚体上作用的力螺旋 …… 88
5.7.1　空间任意力系的平衡方程 …… 88
5.7.2　刚体上作用力的螺旋表示 …… 90
5.7.3　反螺旋的物理意义 …… 91
本章小结 …… 93
第 6 章　关节轨迹规划 …… 94
6.1　三次多项式规划 …… 95
6.2　直线与抛物线混合规划 …… 96
6.3　多点的三次多项式规划 …… 98
6.4　多点直线与抛物线混合规划 …… 99
本章小结 …… 100
第 7 章　机器人动力学 …… 101
7.1　静力学 …… 101
7.1.1　单个杆件静力学 …… 101
7.1.2　递归法计算关节力 …… 103
7.1.3　能量方法 …… 106
7.2　牛顿-欧拉方程 …… 107
7.2.1　单杆牛顿-欧拉方程 …… 107
7.2.2　动力学方程的物理意义 …… 112
7.2.3　机器人动力学方程的结构 …… 113
7.2.4　机器人系统计算仿真 …… 114
7.2.5　递归牛顿-欧拉算法 …… 116
7.3　拉格朗日方程 …… 120
7.3.1　第一类拉格朗日方程 …… 120
7.3.2　第二类拉格朗日方程 …… 122
7.3.3　欧拉-拉格朗日方程 …… 126
7.3.4　n 自由度机械臂动力学方程 …… 127
本章小结 …… 131
第 8 章　机器人控制 …… 132
8.1　二阶线性系统 …… 132
8.2　二阶线性系统的控制 …… 133
8.3　机器人独立关节控制 …… 136
8.3.1　永磁直流电机模型 …… 136
8.3.2　含轮系的直流电机控制模型 …… 138
8.3.3　单关节独立控制模型 …… 140
8.3.4　PD 控制器 …… 140
8.3.5　PID 控制器 …… 141
8.3.6　PID 控制器增益的选择 …… 142

8.3.7 前馈控制 …… 143
8.4 动态控制 …… 145
8.4.1 控制分解法 …… 145
8.4.2 机器人计算力矩控制法 …… 147
本章小结 …… 151
附录 …… 152
附录 A 数学基础 …… 152
附录 B 旋转矩阵与四元数参数转换算法 …… 160
附录 C 动力学基础知识 …… 162
附录 D 单杆 PD 控制仿真 …… 166
附录 E 独立关节控制仿真 …… 168
附录 F PD 计算力矩控制仿真 …… 171
参考文献 …… 175
名词索引 …… 177

第1章 绪 论

1.1 引 言

1962年,美国万能自动化公司(Unimation)机器人Unimate在美国通用汽车公司(GM)投入使用,标志着第一代工业机器人的诞生。工业机器人作为集机械、电子、控制、计算机、传感器、人工智能等多学科先进技术于一体的现代制造业重要的自动化装备,是当代科技发展的一个重要内容。对工业机器人的定义,不同的国家有不同的看法,美国机器人工业协会定义为:“机器人是一种可编程序的多功能操纵器,被设计出来用于运送材料、零件、工具,或者作为专用设备在可编程序控制下执行不同的任务。”日本工业机器人协会把工业机器人定义为:“工业机器人是一种装备具有记忆装置和末端执行器的,能够转动并通过自动完成各种移动来代替人类劳动的通用机器。”国际标准化组织(ISO)把工业机器人定义为:“工业机器人是一种自动的、位置可控的、具有编程能力的多功能机械手,这种机械手具有多个轴,能够借助于可编程序来处理各种材料、零件、工具和专用装置,以执行各种任务。”我国的蒋新松院士把工业机器人定义为:“一种拟人功能的机械电子装置。”

日本川崎重工于1967年从美国Unimation公司引进机器人技术,于1968年试制第一台川崎的Unimate机器人。1974年,美国Cincinnati Milaeron公司推出第一台T3机器人。1978年日本山梨大学的牧野洋提出SCARA机构并完成实用的SCARA(Selective Compliant Articulated Robot for Assembly)机器人开发。1979年,Unimation公司推出可用于装配的机器人PUMA(Programmable University Manipulator)。PUMA机器人的推出可以看作串联工业机器人成熟的标志。

在机器人学研究方面标志性成果如下:

1954年,Denavit-Hartenberg提出表达空间杆件几何关系的一般方法,该方法用于分析机器人正运动学。

1962年,Ernst和Boni分别研究了带触觉和压觉传感器的机械手。

1964年,Uicker博士研究了空间杆机构的动力学问题。

1968年,Pieper用代数法解逆运动学问题。

1972年,Paul研究关节空间轨迹规划问题。

1973年,Bolles和Paul在Stanford Arm配置了视觉和力觉传感器,完成了水泵装配。

1974年,Bejezy研究了机器人动力学和计算力矩控制方法。

1979年,Lozano和Wesley研究了机器人避障问题。

其中1954年和1962年的成果是工业机器人技术运动学和动力学的基础,而当时的研究是面向机构学的。到目前为止,世界上各国对工业机器人的研究已经历经了几十年的历程,日本、美国、法国、德国的工业机器人产业日趋成熟和完善,逐渐形成一批在国际上较有

影响力的知名的工业机器人公司，如日本的安川、OTC、松下、FANUC、川崎等；德国的 KUKA，CLOOS；瑞典的 ABB；意大利的 COMAU 及奥地利的 IGM 等。国内现有机器人研究开发和应用有沈阳新松机器人自动化股份有限公司、四川绵阳四维焊接自动化设备有限公司等，其中以沈阳新松机器人自动化股份有限公司的机器人产品最具代表性。

1.2 工业机器人概述

1.2.1 机器人系统的基本组成

工业机器人系统一般由任务、控制器、执行机构和环境四个相互作用的部分组成，如图 1.1 所示。

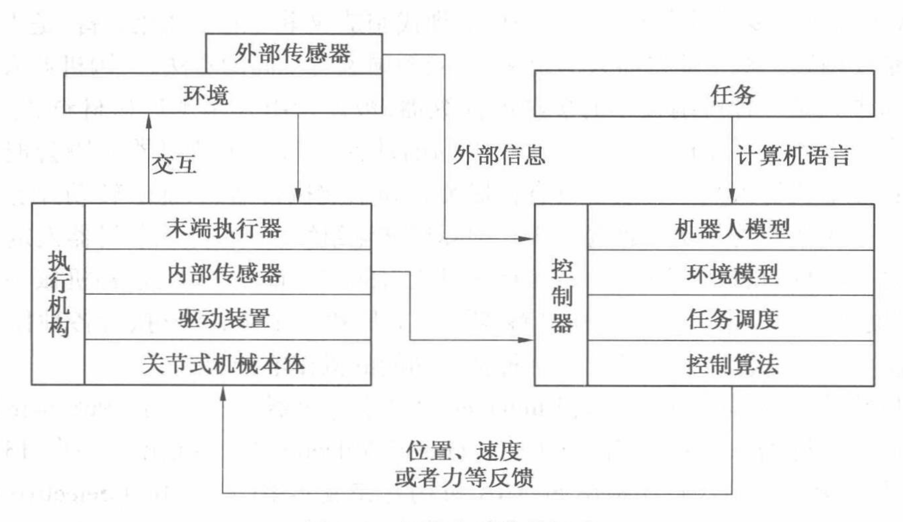


图 1.1 机器人系统的组成

(1)任务。任务是指环境的初始状态和目标状态的差别。任务必须用符合机器人语言规范要求的程序语言来描述，并存入机器人的控制器中，控制器负责解释。

(2)控制器。控制器是工业机器人系统的大脑，由计算机硬件、软件及其他控制电路组成。其中软件包括机器人专用语言解释器、机器人运动学、动力学及机器人控制算法、轨迹规划器及任务调度，任务调度负责信息处理及人机交互，按照预存信息、接收机器人状态信号及环境信息，产生控制信号去驱动机器人各个关节运动。工业机器人控制器在物理上分为两层，即工控机与伺服控制器；在逻辑上一般为三层，即组织层，协调层和执行层，如图1.2 所示。

(3)执行机构。执行机构也称机械手、操纵器或操作手，一般为多关节机械结构，由连杆、关节和末端执行器组成，其末端执行器可按照环境不同而改变，如焊枪、吸盘及手爪等。

(4)环境。环境指机器人执行任务所达到的几何空间内全部事物自然特性所决定的条件。在此环境中，机器人可能需要和其他辅助装置共同完成任务，也可能会遇到障碍物和其他突发事件。环境信息一般是确定和已知的，这种环境称为结构化环境。在此环境下，操作人员利用机器人编程语言编制机器人工作程序，机器人执行程序，可以实现已知的任务。在许多情况下，环境具有未知或不确定性，称为非结构化环境。在此环境下，为了实现不确定

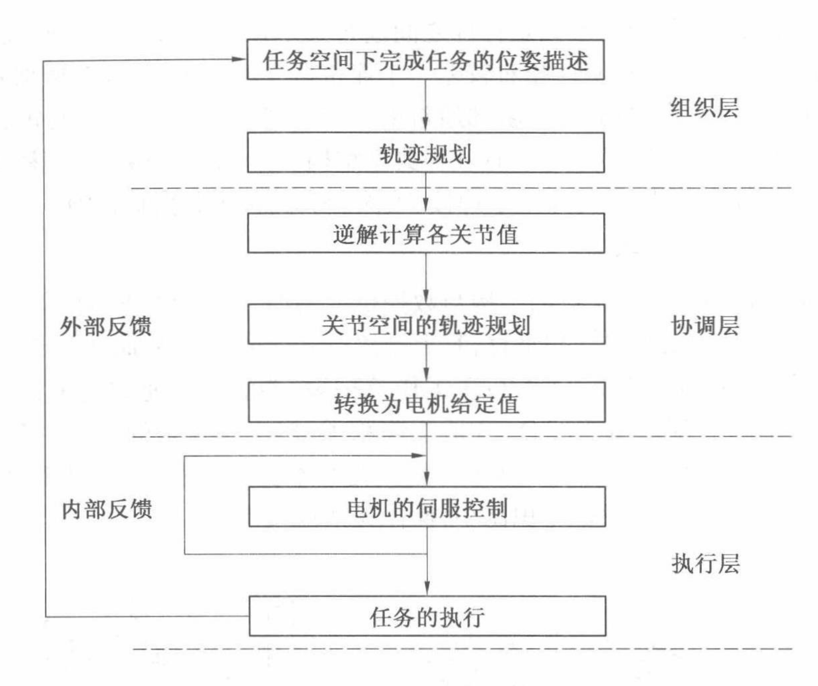


图1.2 机器人控制过程

的任务，机器人拥有外部传感器，对工作对象、外部环境具有一定的感知能力，例如，外部传感器为视觉系统或力传感系统，获取的信息参与控制算法中。

工业机器人所具备的功能是由其机械部分、传感部分及控制部分内部集成所决定的，但是，工业机器人的作业能力还取决于与外部环境的交互能力，例如，上下料机器人在与冲压设备的交互中感知模具开启状态、工件馈送器状态等信息，与外部设备的节拍协调一致，实现正确无误的动作，所以工业机器人与环境的交互是一个重要问题。工业机器人与外部环境的交互包括硬件环境和软件环境。与硬件环境的交互主要是与外部设备的通信、工作域中障碍和自由空间的描述及操作对象物的描述。与软件环境的交互主要是与生产单元监控计算机所提供的管理信息系统的通信。工业机器人不仅要与已知的定义了的外部环境进行交互，而且有可能面临变化的未知的外部环境。在这种情况下，工业机器人仅仅实现可编程控制是不够的，工业机器人被引导去完成任务时，在任何瞬时都要对实际参数信息与所要求的参数信息进行比较，对外部环境所发生的变化产生新的适应性指令，实现其正确的动作功能，这就是工业机器人的在线自适应能力。例如，手部配置有力传感器的装配机器人，在进行圆销插入作业时，需要比较销与孔的位置信息，并且力传感器还要获得装配过程中零件的接触特征，从而进行微量移动控制，并利用手部的柔顺性实现圆销插入作业。工业机器人与环境更高一层的交互是从外部环境中感知、学习、判断和推理，实现环境预测，并根据客观环境规划自己的行动，这就是自律型机器人和智能化机器人。工业机器人与环境交互是机器人技术的关键，工业机器人在没有人工干预的情况下对外部环境的自我适应、行动的自我规划，是机器人技术及其应用的研究方向。

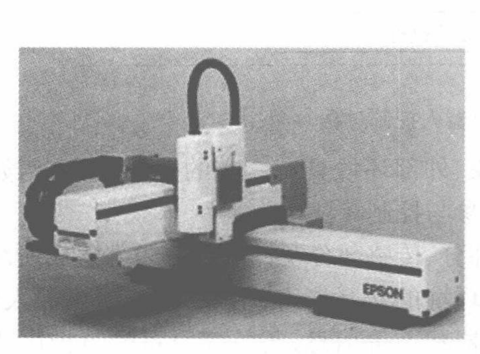
1.2.2 工业机器人常见的结构

以串联机构为构型设计而成的工业机器人本体，称之为串联工业机器人。它是较早应

用于工业领域的机器人,其结构形式是杆件之间通过关节串联形成一个平面或者空间开链机构,其运动链长、负载能力和刚性相对较差。工业机器人本体包括基座、臂部和腕部,大多数工业机器人具有3~6个驱动关节,腕部通常由1~3个驱动关节组成。目前,串联工业机器人按照前三个驱动关节的布置形式,有五种典型结构,即笛卡儿坐标型、圆柱坐标型、球面坐标型、SCARA型和关节型,主要应用于焊接、喷涂、码垛、包装、分拣等领域。

1. 笛卡儿坐标型工业机器人

笛卡儿坐标型机器人(图1.3)的结构与数控机床类似,其工作空间内的三个运动轴(x, y, z)由直线运动构成,运动方向互相垂直,其末端执行器的姿态由附加的旋转关节或机构实现。笛卡儿坐标型机器人具有如下优点:①工作节拍短,能满足高速的要求;②容易与生产线上的传送带或加工装配机械相配合;③适于装箱类、多工序复杂的工作,定位容易改变;④定位精度高,可达到±0.5 mm以下,载重发生变化时不会影响精度;⑤易于控制。其缺点是机构体积庞大,工作空间与设备体积比小,操作灵活性较差。



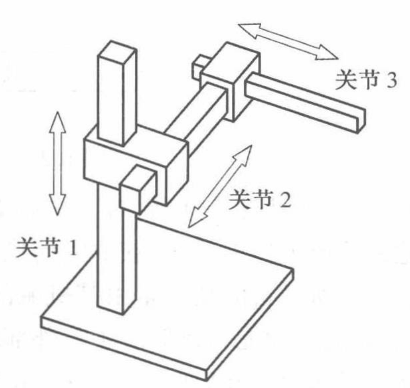


图1.3 Epson笛卡儿型机器人及结构布置示意图

2. 圆柱坐标型工业机器人

圆柱坐标型工业机器人在基座水平转台上装有立柱,水平臂可沿立柱做上下运动并可在水平方向伸缩,其末端工作空间形成一个圆柱面,称为圆柱坐标型工业机器人。它适用于搬运和测量工件,具有直观性好、结构简单、本体占用空间较小等特点。这种结构方案的优点是末端执行器可获得较高的速度,缺点是末端执行器外伸离开立柱轴心越远,其定位精度越低。图1.4所示为一款典型圆柱坐标型工业机器人。

3. SCARA型工业机器人

图1.5所示为选择顺应性装配工业机器人(Selective Compliant Articulated Robot for Assembly,SCARA),是一种特殊类型的圆柱坐标型机器人,通常该机器人具有两个转动、一个平动及一个转动,共四个驱动关节,末端具有四个运动自由度(包括x, y, z方向的平动自由度和绕z轴的转动自由度)。SCARA工业机器人在x, y方向上具有顺从性,而在z轴方向具有良好的刚度,此特性特别适合于装配工作,故SCARA工业机器人首先大量用于装配印刷电路板和电子零部件。SCARA工业机器人的另一个特点是其串联的平面2R机构,类似人的手臂,可以伸进有限空间中作业,然后收回,适合于搬动和取放物件。

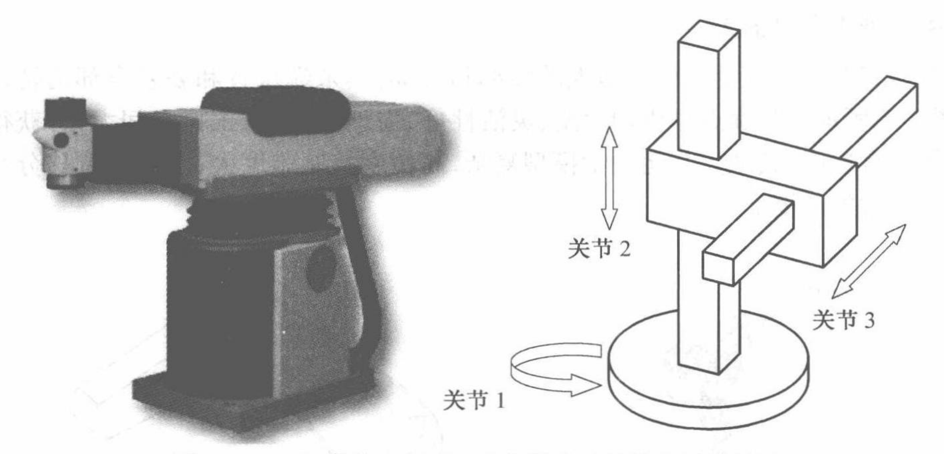


图 1.4　Seiko 圆柱坐标型工业机器人及结构布置示意图

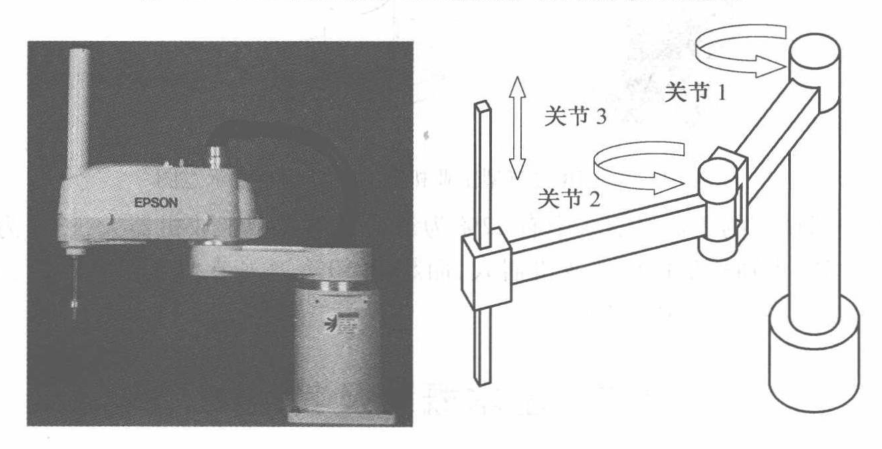
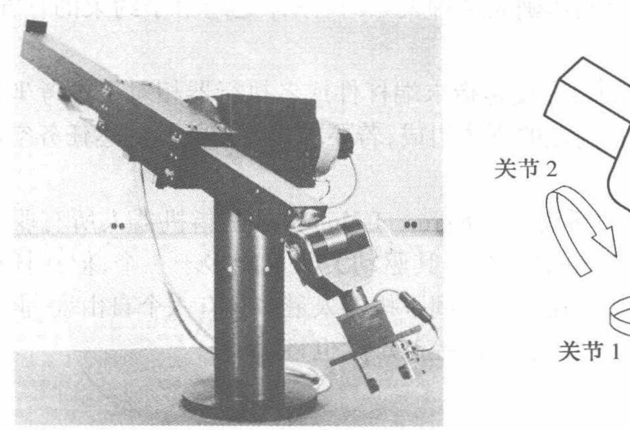


图 1.5　Epson SCARA 工业机器人及结构布置示意图

4. 球面坐标型工业机器人

球面坐标型工业机器人驱动关节的布置包括两个转动关节和一个移动关节，末端执行器可以在水平面内转动，也可以在垂直面内摆动，并且可以做里外伸缩，其工作空间形成球面的一部分，称为球面坐标型工业机器人。图 1.6 为一款球面坐标型工业机器人。



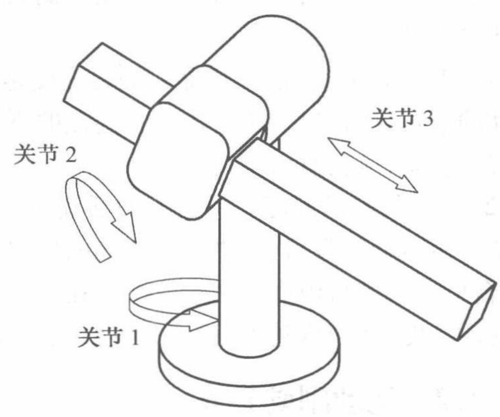


图 1.6　Stanford 球面坐标型工业机器人及结构布置示意图

5. 关节型工业机器人

关节型工业机器人的结构类似人的腰部和臂部，其末端位置和姿态全部由转动关节实现，如图 1.7 所示。其优点是机构紧凑，灵活性好，占地面积小，工作空间大，可获得较高的末端操作器线速度；其缺点是运动学模型复杂，高精度控制难度大，空间线位移分辨率取决于机器人手臂的位姿。

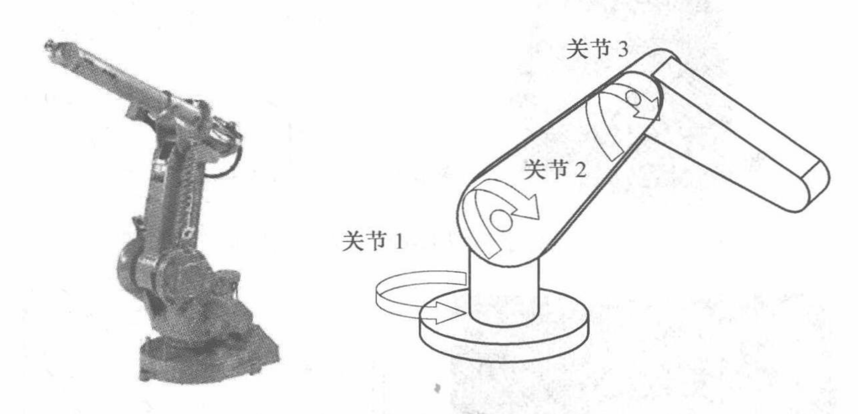


图 1.7 ABB 关节型工业机器人及结构布置示意图

目前，全球现有的工业机器人中有 22% 为笛卡儿坐标型工业机器人，13% 为 SCARA 型工业机器人，4% 为圆柱坐标型工业机器人，而超过 60% 为关节型工业机器人，关节结构已逐渐成为工业机器人的通用结构。

1.3 基本概念及其定义

1.3.1 机器人的自由度与活动度

刚体相对于参考坐标系进行独立运动的数目为刚体的自由度（Degree of Freedom, DOF）。在笛卡儿坐标系下，刚体能够进行的运动为沿绕三个坐标轴平移运动或者旋转运动，意味着能够运用三个平移和三个旋转参数描述刚体相对于参考坐标系的位置和方向。空间自由刚体有六个自由度，当两个刚体确立某种关系时，刚体之间由于约束的存在，将失去一些自由度。

（1）机器人的自由度。机器人的自由度是指末端杆件或者执行器相对于参考坐标系独立运动的数目，通常机械手臂由互相连接的刚体组成，若要求机器人能够到达任务空间的任意位置和姿态，应具有六个自由度。

（2）机器人的活动度。机器人的活动度（Degree of Mobility）是指机器人所有驱动关节具有的自由运动的数目，在平面内运动的机器人，其驱动关节可能多于三个，但在任何情况下，此台机器人的自由度不多于三个。在三维空间下机器人最多具有六个自由度，但可以有较多的活动度，活动度越多，机器人灵活性越大，控制难度也将增加。

1.3.2 运动副或关节

一般而言，机械臂是由杆件通过运动副依次连接而成的机构。杆件是组成机构的基本

运动单元,可以是一个零件,也可以由若干零件刚性连接在一起组成。当由杆件组成机构时,需要以一定的方式把各个杆件依次连接起来,每个杆件至少与另外一个杆件连接,连接不是刚性的,应保证彼此连接的两个杆件产生某些相对运动。由两个杆件组成的可动的连接称为运动副,在工业机器人机构中形象地称为关节(Joint)。常用运动副的简图、代号及自由度数见表1.1。机构常以它所含的全部运动副的代号来命名,例如,从基座开始,一个转动副和两个移动副组成的机构,例如图1.4所示机构,通常称为RPP机构。

表1.1 常见运动副的简图、代号及自由度

运动副	简图	代号	自由度	运动副	简图	代号	自由度
转动副		R	1	万向铰(胡克铰)		U(T)	2
移动副		P	1	球副		S	3
圆柱副		C	2	平面副		E	3

1.3.3 运动链

两个以上的杆件通过运动副的连接而构成的系统称为运动链(Kinematics Chain)。如果运动链的杆件未构成首尾封闭的结构,称为开环(Open-loop)运动链,简称开链。如果运动链的各杆件构成首尾封闭的结构,称为闭环(Close-loop)运动链,简称闭链。在运动链中,如果每个杆件都在同一平面上,或者在相互平行的平面内运动,则称为平面运动链,否则称为空间运动链。

1.3.4 机构

在运动链中,如果以某一杆件为参考系,当某些杆件按给定的运动规律运动时,其余所有杆件都有确定的相对运动,那么此运动链便成为一个机构。机构中作参考系的杆件称为机架,按给定运动规律运动的杆件称为原动件,其余的称为从动件。从动件的运动规律取决于原动件的运动规律和机构的结构形式。多于一个闭链的机构称为多闭链机构或多环机构,只有一个闭链的机构称为单闭链机构。

1.3.5 笛卡儿坐标系和广义坐标

考虑一个具有 n 个质点的系统，$\{S\}=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$，在笛卡儿坐标系下，第 i 个点的位置矢量是 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(x_i,y_i,z_i)$，可以表示为

$$\boldsymbol{r}_i=x_i\boldsymbol{i}+y_i\boldsymbol{j}+z_i\boldsymbol{k},i=1,2,\cdots,n \tag{1.1}$$

n 个质点的系统需要 $3n$ 个物理坐标来确定其位置，在许多情况下，为了方便分析系统的运动，使用一组相互独立的变量集合 $q_1,q_2,\cdots,q_m$ 来表示，其物理坐标为

$$\begin{gathered}x_1=x_1(q_1,q_2,\cdots,q_m)\\ y_1=y_1(q_1,q_2,\cdots,q_m)\\ z_1=z_1(q_1,q_2,\cdots,q_m)\\ \vdots\\ x_n=x_n(q_1,q_2,\cdots,q_m)\\ y_n=y_n(q_1,q_2,\cdots,q_m)\\ z_n=z_n(q_1,q_2,\cdots,q_m)\end{gathered} \tag{1.2}$$

则 $q_1,q_2,\cdots,q_m$ 为广义坐标，可以完整地、唯一地描述动态系统的位置。一般而言，一个机构的运动可由 m 个相互独立的广义坐标来描述，系统的任意位形都可以用这 m 个广义坐标来表示。广义坐标必须是相互独立的，任何一组能够完全描述系统运动的独立变量都可以选作广义坐标，可以是笛卡儿坐标，也可以是其他量，如极坐标、球坐标、相对角位移或线位移。

【例 1.1】 如图 1.8 所示的平面 2R 机构，杆 1 的长度为 l_1，绕 z 轴的转动角为 q_1；杆 2 的长度为 l_2，相对于杆 1 的转动角为 q_2。杆 2 绕 z 轴的转动角为 φ，杆 2 上点 P 在笛卡儿坐标系下的位置矢量 $\boldsymbol{p}(x_p,y_p)$ 可以表示为

$$\begin{cases}\varphi=q_1+q_2\\ x_p=l_1\cos\ q_1+l_2\cos\ q_1+q_2\\ y_p=l_1\sin\ q_1+l_2\sin(q_1+q_2)\end{cases} \tag{1.3}$$

式中，q_1,q_2 是描述运动的独立参数，确定一个系统的运动状况，为系统的广义坐标。

1.3.6 位形空间

1. 连杆的位姿（Position and Orientation）

连杆的位置和姿态可以用与连杆固连的坐标系相对于参考坐标的位置和姿态表示，如图 1.9 所示，平面运动的连杆的位置和姿态 $\boldsymbol{x}_e$ 可以给定为

$$\boldsymbol{x}_e=(\boldsymbol{r},\boldsymbol{R}_\theta) \tag{1.4}$$

式中，$\boldsymbol{r}$ 表示坐标系{1}原点相对于参考系{0}的位置，$\boldsymbol{r}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{R}_\theta$ 表示坐标系{1}相对{0}的方向矩阵，$\boldsymbol{R}_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$。位置和姿态也可以给定为 (x,y,θ)，θ 表示连杆绕 z 轴转动的角度。

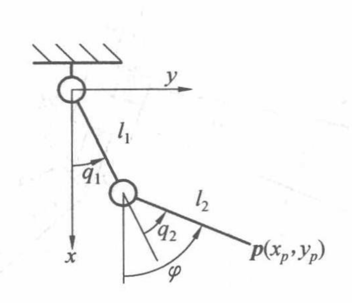


图1.8 平面2R机构

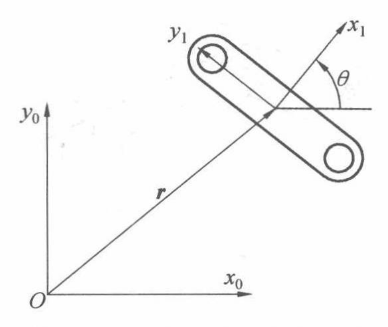
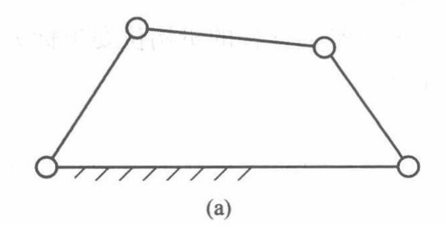


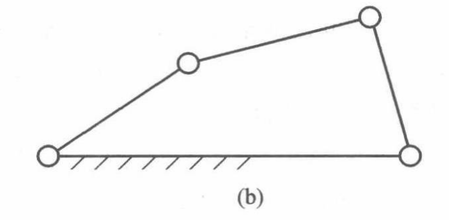
图1.9 平面单杆的位置与姿态

2. 机构位形(Mechanism Configuration)

机构位形是指在符合关节装配约束的条件下，机构运动瞬时各连杆的位姿组成，以平面四杆机构为例，图1.10所示为平面四杆机构的两种位形。



(a)



(b)

图1.10 平面四杆机构的两种位形

(1)转动关节的装配约束。假定有两个连杆 L_j和 L_k，如图1.11所示，两者通过转动关节相连，此连接相当于杆 L_j上点 P_i和杆 L_k上 Q_i点重合，在连杆 L_j和 L_k上分别建立固连坐标系 F_j和 F_k，有以下约束条件

$$\boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{R}_j^{F_j}\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{R}_k{}^{F_k}\boldsymbol{q}_i \tag{1.5}$$

式中，$\boldsymbol{r}_j$，$\boldsymbol{r}_k$ 分别表示坐标系 F_j和 F_k原点在参考坐标系 F_1下的位置矢量；$\boldsymbol{R}_j$，$\boldsymbol{R}_k$ 为坐标系 F_j和 F_k相对于参考坐标系 F_1的方向矩阵；${}^{F_j}\boldsymbol{p}_i$，${}^{F_k}\boldsymbol{q}_i$ 为点 P_i和 Q_i分别在坐标系 F_j和 F_k下的位置矢量。

(2)移动关节的装配约束。假定有两个连杆 L_j和 L_k，两者通过移动关节相连，如图1.12所示，此连接为初始状态时，杆 L_j上的点 P_i和杆 L_k上的点 Q_i重合，随着移动关节的平动，在关节轴线方向 $\boldsymbol{e}_i$ 上两点之间的距离为 d_i，有以下约束条件：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{R}_j^{F_j}\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{R}_k({}^{F_k}\boldsymbol{q}_i+d_i{}^{F_k}\boldsymbol{e}_i)\\&\boldsymbol{R}_k=\boldsymbol{R}_j\boldsymbol{R}_{jk}\end{aligned} \tag{1.6}$$

式中，$\boldsymbol{R}_{jk}$为坐标系 F_k相对于坐标系 F_j的方向矩阵。

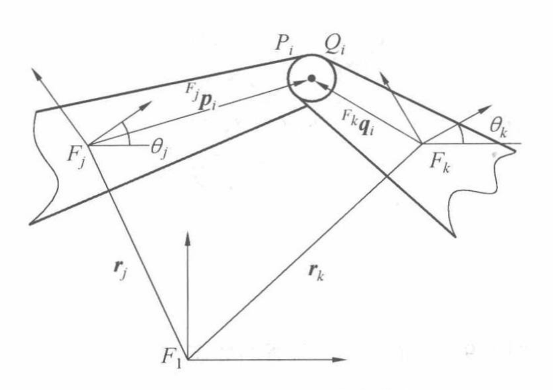


图 1.11 转动关节约束关系

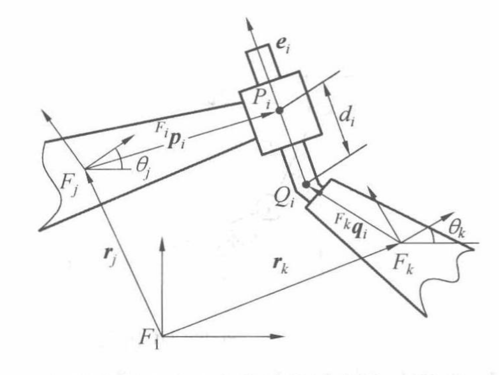


图 1.12 移动关节约束关系

(3)机架。通常机架标记为杆 0，固连坐标系 F_1 与参考坐标系重合。此时

$$\boldsymbol{r}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

(4)位形空间隐式表示(Implicit Representation)。n 个平面连杆的机构位姿坐标矢量为

$$\boldsymbol{q}=[\boldsymbol{r}_1,\theta_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n,\theta_n]^{\mathrm{T}} \tag{1.7}$$

所有关节装配约束条件为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{0} \tag{1.8}$$

则位形空间(C-space)集合为

$$C=\{\boldsymbol{q}:\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{0}\} \tag{1.9}$$

这是位形空间的隐式表示,坐标矢量 $\boldsymbol{q}$ 中各分量可能会相互依赖,必须满足约束条件 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{0}$。

【例 1.2】 平面 2R 机械臂如图 1.13 所示,F_1 坐标系固连于杆 0,为参考坐标系,分别在杆 1 和杆 2 的前端建立固连坐标系 F_2 和 F_3,杆 1 和杆 2 的长度分别为 l_1 和 l_2,试描述 2R 机械臂的位形空间。

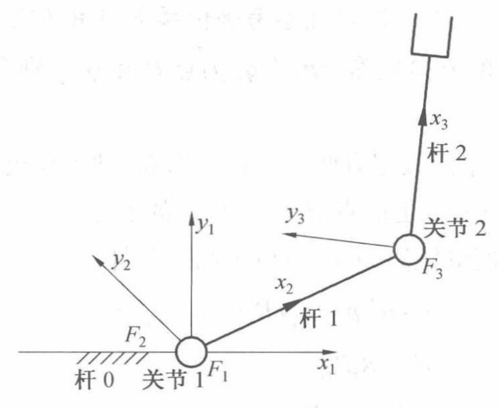


图 1.13 2R 机械臂位形描述

首先给出杆 1 和杆 2 的坐标矢量为

$$\boldsymbol{q}=[x_1,y_1,\theta_1,x_2,y_2,\theta_2]^{\mathrm{T}}$$

依据公式(1.5),关节 1 的装配约束为

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{0} \tag{1.10}$$

关节 2 的装配约束为

$$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{R}_1^{F_2}\begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \end{bmatrix}=\boldsymbol{r}_2 \tag{1.11}$$

结合式(1.10)(1.11),得出的约束条件为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{0}$$

$$\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \\ l_1\cos\ \theta_1-x_2=0 \\ l_1\sin\ \theta_1-y_2=0 \end{cases} \tag{1.12}$$

(5)位形空间参数表示方法(Parametric Representation)。当 n 杆机械臂是各杆件通过关节依次串联而成的开链结构时,能找出独立的关节坐标矢量 $\boldsymbol{q}$,可以完整描述机构的瞬时位形。与式(1.9)相比,其位形空间易于理解和表示,任何连杆的位姿可以用 $\boldsymbol{q}$ 显式表示,称为参数表示方法。图1.8所示的平面2R机构位形参数表示法为

$$\boldsymbol{q}=[q_1,q_2]^{\mathrm{T}}$$

参数表示法并不是一直存在的,对于闭链机构仅能通过隐式形式表示位形。

1.3.7 工作空间

机器人末端执行器运动描述参考点所能达到的空间点的集合,称为机器人工作空间(Work Space)或任务空间(Task Space)。机器人工作空间又可细分为柔性(Dexterous)工作空间和可达(Reach Able)工作空间。空间中一点,机器人末端以任意姿态均可到达,此类点组成的空间称为柔性工作空间。机器人至少以一种姿态到达的点组成的空间称为可达工作空间。显然,可达工作空间大于柔性工作空间。机器人工作空间一般用水平面和垂直面的投影表示。

1.3.8 额定速度与额定负载

机器人末端的运动是机器人所有关节运动的合成,对应于末端运动的一段轨迹,相应的各关节运动过程一般包括启动、加速、匀速、减速来完成。为了提高生产效率,希望机器人运动周期短,那么启动、加速及减速时间要尽可能短,但过大的加减速会造成较大的惯性,容易出现振动,运行不平稳。因此,机器人在保持运动平稳及位置精度的前提下所能达到的最大速度称为额定速度(Rated Velocity)。各关节的运动速度称为单轴速度,其末端的速度是由各关节的速度合成。在额定速度和行程范围内,末端执行器所能承受负载的允许值称为额定负载(Rated Load)。超大型机器人,负载能力在1 000 kg以上;大型机器人,负载能力在100~1 000 kg;中型机器人,负载能力为10~100 kg;小型机器人,负载能力为0.1~10 kg;超小型机器人,负载能力在0.1 kg以下。

1.3.9 精度

关节控制分辨率(Control Resolution)是机器人各关节能够实现的最小移动距离或最小转角。末端控制分辨率是机器人控制器根据指令能控制的最小位移增量。如图1.14所示,电机通过减速箱带动丝杠运动,进而驱动托板移动,假定电机的编码器为二进制,位数为 m,

减速箱的减速比为 $\eta=r_2/r_1$，丝杠的导程为 d，则此关节的控制分辨率 C_R 为

$$C_R=\frac{d}{2^m\eta} \tag{1.13}$$

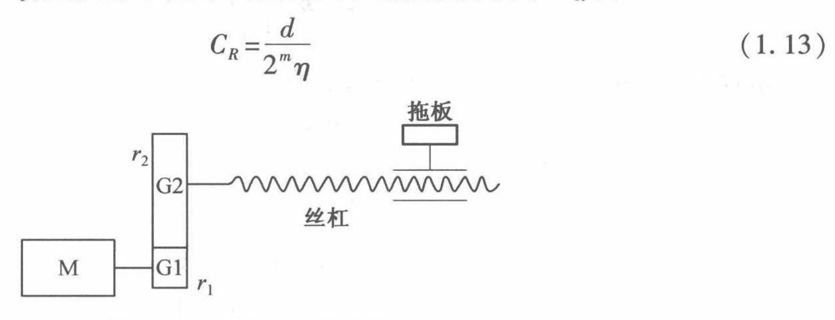
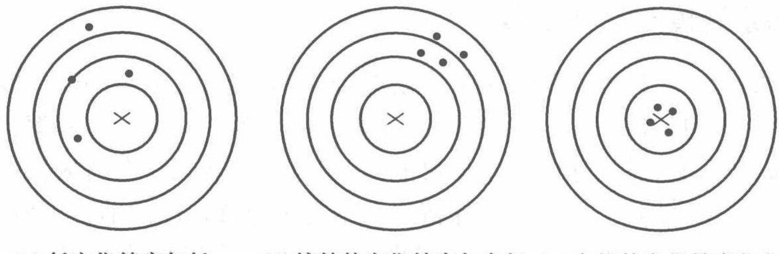


图 1.14 单关节移动分辨率

从式(1.13)可以看出，对于图 1.14 所示的传动方式，提高关节分辨率的方法可以是加大减速比或选择大位数的编码器。对于移动关节，此关节的分辨率传递到末端保持不变，而对于转动关节，其控制角分辨率需要乘以臂长得到末端的分辨率。

末端空间分辨率(Spatial Resolution)是指末端执行器运动的最小增量，其大小受包括末端控制分辨率、机械误差及计算机控制计算误差等在内多因素影响。

(1)定位精度与重复定位精度。机器人执行一位姿指令，其末端执行器在参考坐标系下实际到达位置和指令位姿之间的偏差称为位姿误差(Accuracy)。位姿误差又可细分为位置误差(Position Accuracy)和姿态误差(Orientation Accuracy)。在相同条件下，机器人多次执行同一位姿指令，所测量得到实际位姿分布的不一致程度，称为重复定位精度(Repeatability)。在某一时间段或者不同温度条件下，能保持相同测量特性的能力，称为稳定性。假定机器人目标指令的位置为图中心点的位置，执行四次指令实际到达的位置如图 1.15(a)所示，每次距离中心点位置较远，并且四次实际位置分布分散，表明机器人定位精度和重复定位精度较差；同理，图 1.15(b)表明机器人具有较差的定位精度和良好的重复定位精度；图 1.15(c)表明机器人具有良好的定位精度与良好的重复定位精度。



(a) 低定位精度与低重复定位精度　(b) 较差的定位精度与良好的重复定位精度　(c) 良好的定位精度与良好的重复定位精度

图 1.15 定位与重复定位精度示意图

(2)线性误差。如果名义输入输出是一种线性关系，如图 1.16 所示，则测量实际输出与名义输出最大的偏差与输出范围的百分比定义为线性误差。

(3)偏置误差。偏置误差指零输入时，输出实际值与名义值的差值。在机器人复位完成后，各关节实际位置与控制系统内的名义位置存在偏差，此误差对机器人末端定位精度的影响较大。如图 1.17 所示，为平面 2R 机械臂的初始位形，假定第 1 驱动轴电机与关节之间减速系统的减速比为 η，名义上，此时关节位置为 90°，名义上，电机转角输入 θ_{input} 与关节位置的输出 θ_{output} 之间的关系为

$$\theta_{\text{output}} = \eta\theta_{\text{input}} + 90° \tag{1.14}$$

当 $\theta_{\text{input}}=0$ 时,第1关节的名义位置为90°,但实际上,当前名义位置与实际位置存在偏差,因为工业机器人臂展较长,各个关节的偏置误差对末端定位精度影响较大。

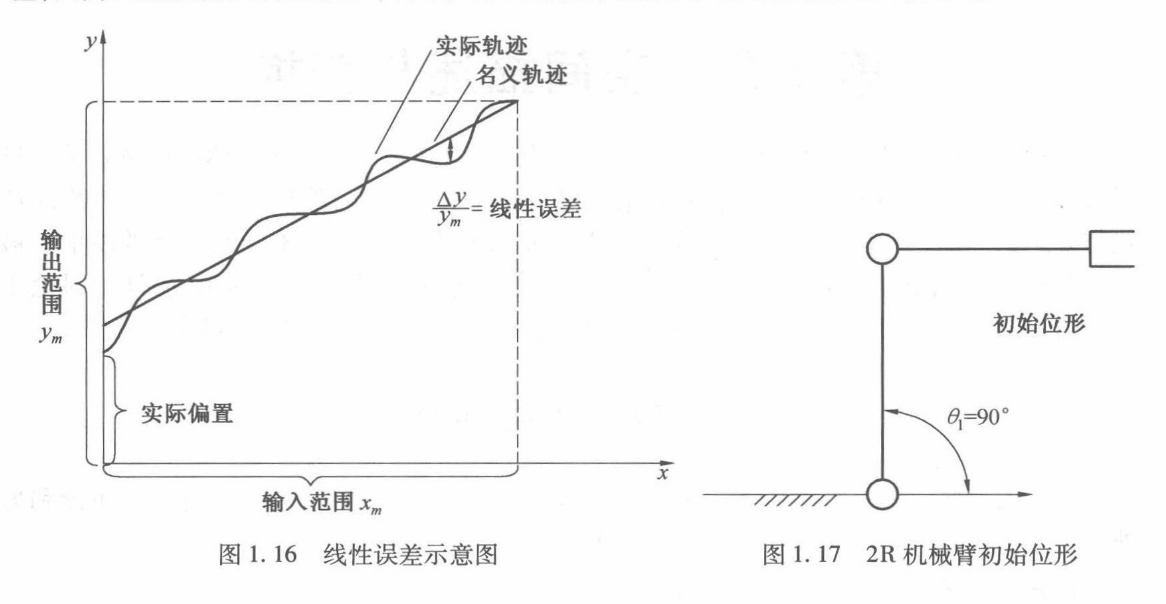


图1.16　线性误差示意图　　　图1.17　2R机械臂初始位形

本章小结

本章介绍了工业机器人系统的基本组成,串联工业机器人常见的结构构型及其特点。重点阐述了本书后面章节将用到的基本概念及常用术语,为后续的学习奠定基础。

第 2 章　空间描述与变换

对机器人运动进行描述，不仅涉及机器人本体，而且还涉及空间各物体间以及物体与机器人基坐标系之间的关系。本章首先介绍机器人常用的坐标系，然后讨论两坐标系之间位置与姿态的描述，进而通过齐次变换矩阵描述空间相同的点在不同坐标系之间的映射。最后，用齐次变换矩阵描述刚体在空间的平移与旋转运动，对于刚体的旋转运动，详细讨论用欧拉角方式、一般旋转方式以及欧拉-罗德里格斯参数方式描述刚体的空间旋转运动。

2.1　机器人坐标系统

机器人程序中所有点的位置都是和一个坐标系相联系的，同时，这个坐标系也可能和另外一个坐标系有联系。机器人系统常用的坐标系有如下几种。

1. 基坐标系(Base Coordinate System)

在简单任务的应用中，可以在机器人基坐标系下编程，其坐标系的 z 轴和机器人第 1 关节轴重合。机器人基坐标系的定义如图 2.1 所示，一般而言，原点位于第 1 关节轴轴线和机器人基础安装平面的交点，并以基础安装平面为 xy 平面，x 轴方向指向正前方，y 轴与 x 轴符合右手法则，z 轴向上。

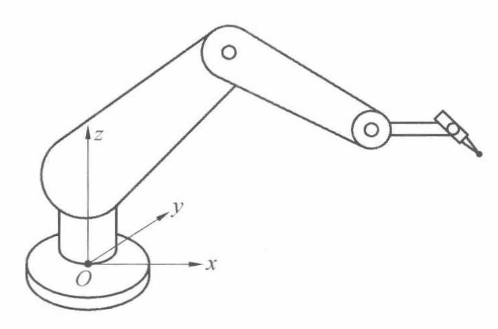
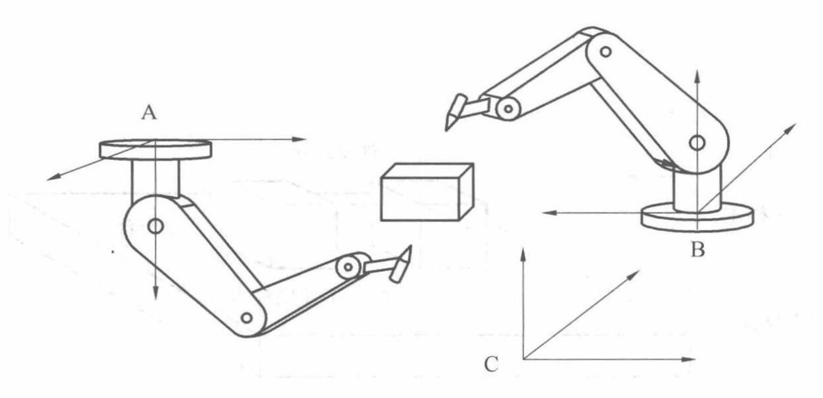


图 2.1　机器人基坐标系

2. 世界坐标系(World Coordinate System)

如果机器人安装在地面，在基坐标系下示教编程很容易。然而，当机器人吊装时，机器人末端移动直观性差，因而示教编程较为困难。另外，如果两台或更多台机器人共同协作完成一项任务时，例如，一台安装于地面，另一台倒置，倒置机器人的基坐标系也将上下颠倒。如果分别在两台机器人的基坐标系中进行运动控制，则很难预测相互协作运动的情况。在此情况下，可以定义一个世界坐标系，选择共同的世界坐标系取而代之。若无特殊说明，单台机器人世界坐标系和基坐标系是重合的。如图 2.2 所示，当在工作空间内同时有几台机器人时，使用公共的世界坐标系进行编程有利于机器人程序间的交互。



A—基坐标系;B—基坐标系;C—世界坐标系

图 2.2 世界坐标系

3. 用户坐标系(User Coordinate System)

机器人可以和不同的工作台或夹具配合工作,在每个工作台上建立一个用户坐标系。机器人大部分采用示教编程的方式,步骤烦琐,对于相同的工件,如果放置在不同的工作台上,在一个工作台上完成工件加工示教编程后,如果用户的工作台发生变化,不必重新编程,只需相应地变换到当前的用户坐标系下。用户坐标系是在基坐标系或者世界坐标系下建立的。如图 2.3 所示,用两个用户坐标系来表示不同的工作平台。

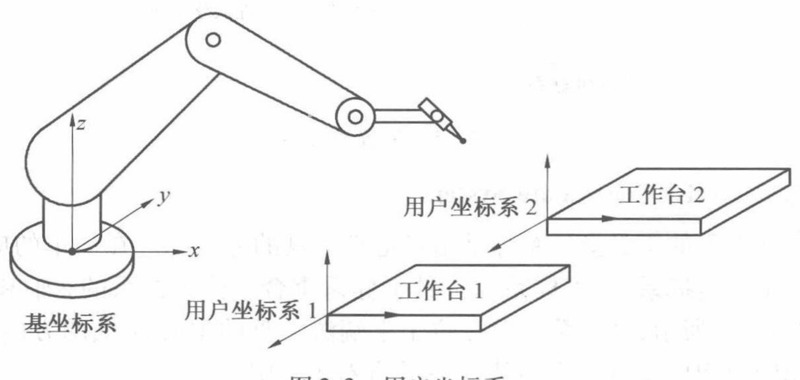


图 2.3 用户坐标系

4. 工件坐标系(Object Coordinate System)

用户坐标系是用来定义不同的工作台或者夹具的。然而,一个工作台上也可能放着几个需要机器人进行加工的工件,所以和定义用户坐标系一样,也可以定义不同的工件坐标系,当机器人加工工作台上加工不同的工件时,只需变换相应的工件坐标系即可。工件坐标系是在用户坐标系下建立的,两者之间的位置和姿态是确定的。如图 2.4 所示,表示在同一个工作台上的两个不同工件,它们分别用两个不同的工件坐标系表示。例如,在工件坐标系下待加工的轨迹点,可以变换到用户坐标系下,进而变换到基坐标系下。

5. 置换坐标系(Displacement Coordinate System)

有时需要对同一个工件、同一段轨迹在不同的工位上加工,为了避免每次重新编程,可以定义一个置换坐标系。置换坐标系是基于工件坐标系定义的。如图 2.5 所示,当置换坐标系被激活后,程序中的所有点都将被置换。在 RAPID 语言中,有三条指令(PDispSet,

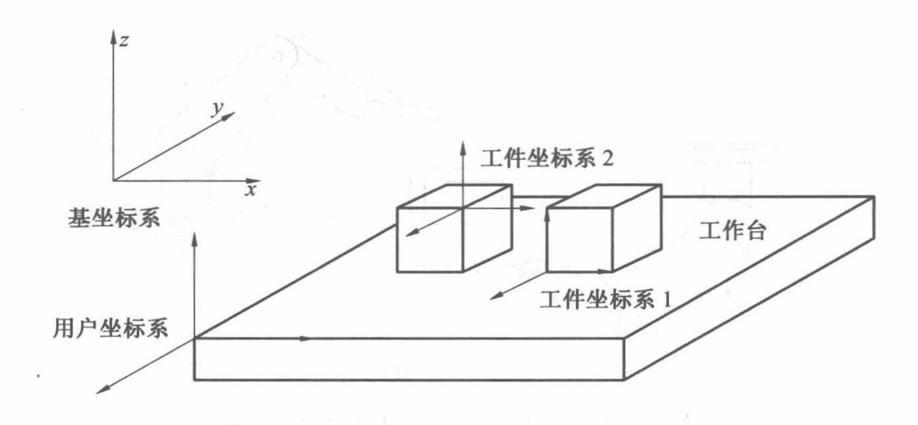


图 2.4 工件坐标系

PDispOn, PDispOff)关系到置换坐标系的使用。

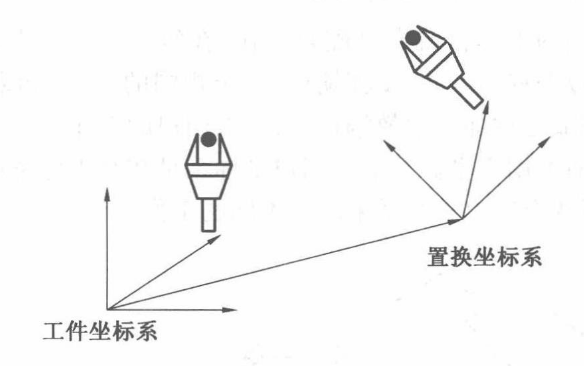


图 2.5 置换坐标系

6. 腕坐标系(Wrist Coordinate System)

腕坐标系和下面的工具坐标系都是用来定义工具的方向的。在简单的应用中,腕坐标系可以定义为工具坐标系,腕坐标系和工具坐标系重合。腕坐标系的 z 轴和机器人的第 6 根轴重合,如图 2.6 所示,坐标系的原点位于末端法兰盘的中心,x 轴的方向与法兰盘上标识孔的方向相同或相反,z 轴垂直向外,y 轴符合右手法则。

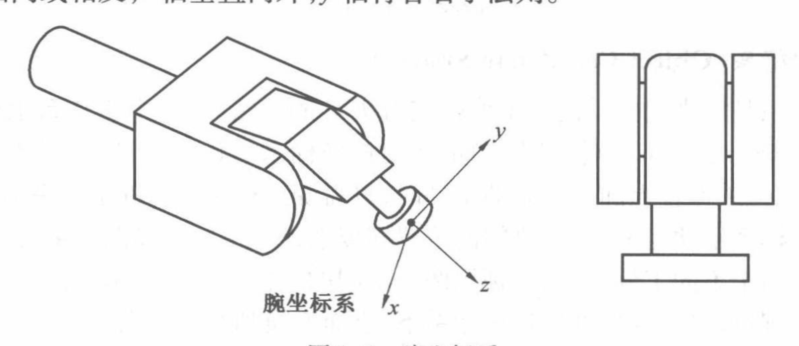


图 2.6 腕坐标系

7. 工具坐标系(Tool Coordinate System)

安装在末端法兰盘上的工具需要在其中心点(TCP)定义一个工具坐标系,通过坐标系的转换,可以操作机器人在工具坐标系下运动,以方便操作。如果工具磨损或更换,只需重

新定义工具坐标系，而不用更改程序。工具坐标系建立在腕坐标系下，即两者之间的相对位置和姿态是确定的。图 2.7 所示表示不同工具的工具坐标系的定义。

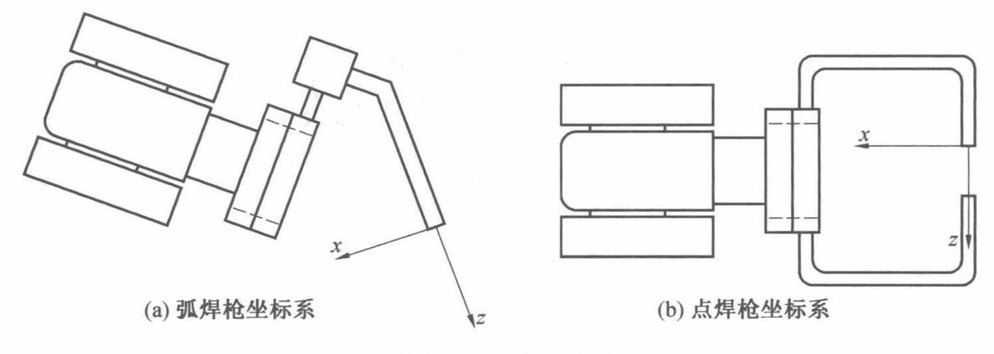


图 2.7　工具坐标系

8. 关节坐标系（Joint Coordinate System）

关节坐标系用来描述机器人每个独立关节的运动，如图 2.8 所示。所有关节类型可能不同（如移动关节、转动关节等）。假设将机器人末端移动到期望的位置，如果在关节坐标系下操作，可以依次驱动各关节运动，从而引导机器人末端到达指定的位置。

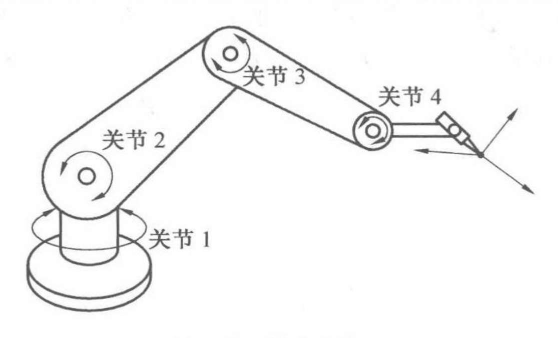


图 2.8　关节坐标系

上述是机器人常用的坐标系，那么在不同的坐标系下，空间相同的一个点是如何在不同坐标系下映射的呢？例如，工件上的点如何映射到基坐标系下表示，或者在工具坐标系下表示。下面章节将讨论这个问题。

2.2　位置和姿态的表示

机器人运动学研究通常涉及多物体之间空间位置与姿态的关系，如机械手、工具和工件等。为了确定各物体之间的位置与姿态，需要建立与之固连的坐标系，通过分析各坐标系之间的位置与姿态，进而确定各物体之间的位置与姿态的关系。本书首先从两个坐标系之间的位置与姿态分析入手，进一步可以推演到多坐标系之间的位置与姿态的关系。

如图 2.9 所示，假定 $x_A-y_A-z_A$ 坐标系统是固定不动的坐标系统，称为参考坐标系或定坐标系，用 $\{A\}$ 表示。$x_B-y_B-z_B$ 坐标系统与运动刚体固连，称为动坐标系，用 $\{B\}$ 表示。显然，刚体在定坐标系下的位置和姿态可以通过动坐标系在定坐标系下的位置和姿态确定，一般而言，刚体的位置与姿态对应于动坐标系原点及各坐标轴在定坐标系的位置与方向。

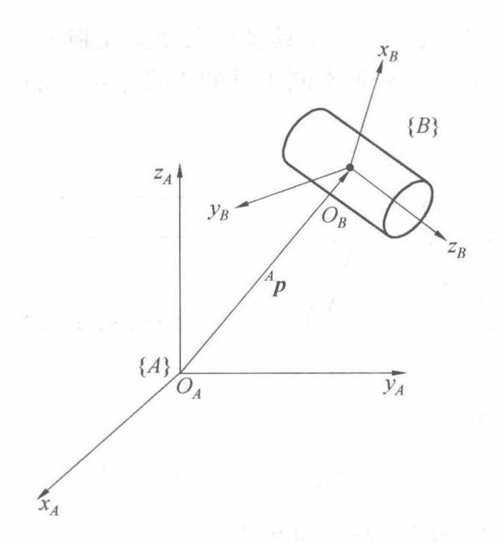


图 2.9 坐标系的建立

2.2.1 位置的描述

刚体上点 S 相对于定坐标系的位置可以通过一个三维笛卡儿矢量 $\boldsymbol{p}$ 来表示，如图 2.10 所示，如果点 S 各坐标分量表示为 p_x，p_y，p_z，则在定坐标系{A}下，矢量 $\boldsymbol{p}$ 表示为

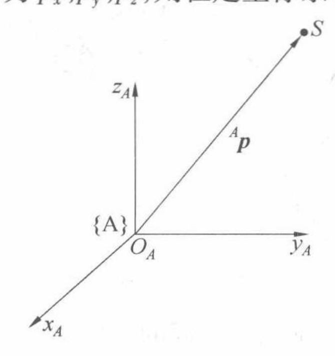


图 2.10 点位置矢量

$$^A\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{bmatrix} \tag{2.1}$$

其中，p_x，p_y，p_z 是点 S 在坐标系{A}下沿着 x，y，z 轴的三个坐标分量。$^A\boldsymbol{p}$ 左上角的 A 表示矢量 $\boldsymbol{p}$ 在坐标系{A}下表示，矢量 $^A\boldsymbol{p}$ 也可以写为

$$^A\boldsymbol{p}=p_x\boldsymbol{i}+p_y\boldsymbol{j}+p_z\boldsymbol{k} \tag{2.2}$$

式中，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 表示沿着坐标系{A}的 x，y 和 z 轴的单位方向。在坐标系{A}下，可以表示为

$$\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{2.3}$$

将式(2.3)代入式(2.2)，显然与式(2.1)相同。如果矢量 $\boldsymbol{p}$ 在另外一个坐标系下表示，即使 S 点实际位置不变，其沿着新坐标系的三个分量值也是要改变的，因此，要特别注意空

间点所在的坐标系。

2.2.2　姿态的描述

空间一个刚体，不仅要表示其在空间的位置，而且要表示出在空间的姿态（Orientation）。刚体的姿态，可以由固连于此刚体的坐标系$\{B\}$相对于定坐标系$\{A\}$的姿态来表示，表示方式有以下不同形式：①用方向余弦表示；②用欧拉角或其他的转动角表示。每种姿态的表示方法都有自身的局限性，在机器人运动描述或者运动控制中，为了在某些位置克服当前姿态描述的局限性，经常需要在不同的姿态描述之间转换。

1. 方向余弦表示

为了描述动坐标系$\{B\}$相对于定坐标系$\{A\}$的姿态，先假定两坐标系原点重合，如图 2.11所示。

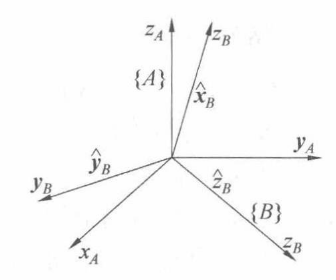


图 2.11　姿态的描述

令$\hat{\boldsymbol{x}}_B$，$\hat{\boldsymbol{y}}_B$，$\hat{\boldsymbol{z}}_B$ 分别表示沿着坐标系$\{B\}$坐标轴的三个单位主矢量，三个矢量在坐标系$\{A\}$下可以表示为${}^A\hat{\boldsymbol{x}}_B$，${}^A\hat{\boldsymbol{y}}_B$，${}^A\hat{\boldsymbol{z}}_B$，写成列矩阵形式分别为

$$
{}^A\hat{\boldsymbol{x}}_B=\begin{bmatrix} r_{11}\\ r_{21}\\ r_{31}\end{bmatrix},\ {}^A\hat{\boldsymbol{y}}_B=\begin{bmatrix} r_{12}\\ r_{22}\\ r_{32}\end{bmatrix},\ {}^A\hat{\boldsymbol{z}}_B=\begin{bmatrix} r_{13}\\ r_{23}\\ r_{33}\end{bmatrix} \tag{2.4}
$$

式中，$[r_{11}\quad r_{21}\quad r_{31}]^{\mathrm{T}}$ 表示坐标系$\{B\}$的$\hat{\boldsymbol{x}}_B$ 单位矢量在坐标系$\{A\}$三个主轴上的投影，其他表示类似。把上面三个方向组合到一起，在坐标系$\{A\}$下，坐标系$\{B\}$的姿态显然可以用一个 3×3 的矩阵来表示，即

$$
{}_B^A\boldsymbol{R}=[{}^A\hat{\boldsymbol{x}}_B\quad {}^A\hat{\boldsymbol{y}}_B\quad {}^A\hat{\boldsymbol{z}}_B]=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{bmatrix} \tag{2.5}
$$

式中，${}_B^A\boldsymbol{R}$ 为坐标系$\{B\}$相对于坐标系$\{A\}$的姿态矩阵或者旋转矩阵，上标 A 表示定坐标系标签，下标 B 表示动坐标系标签。${}_B^A\boldsymbol{R}$ 矩阵中三个列矢量${}^A\hat{\boldsymbol{x}}_B$，${}^A\hat{\boldsymbol{y}}_B$，${}^A\hat{\boldsymbol{z}}_B$ 都是单位矢量，且互相垂直，并满足下面六个正交约束条件：

$$
\begin{gathered}
{}^A\hat{\boldsymbol{x}}_B\cdot{}^A\hat{\boldsymbol{x}}_B={}^A\hat{\boldsymbol{y}}_B\cdot{}^A\hat{\boldsymbol{y}}_B={}^A\hat{\boldsymbol{z}}_B\cdot{}^A\hat{\boldsymbol{z}}_B=1\\
{}^A\hat{\boldsymbol{x}}_B\cdot{}^A\hat{\boldsymbol{y}}_B={}^A\hat{\boldsymbol{y}}_B\cdot{}^A\hat{\boldsymbol{z}}_B={}^A\hat{\boldsymbol{x}}_B\cdot{}^A\hat{\boldsymbol{z}}_B=0
\end{gathered} \tag{2.6}
$$

矩阵${}_B^A\boldsymbol{R}$ 中各元素 r_{ij}的计算可以通过求余弦方式得到，即

$$ {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}=[{}^{A}\hat{\boldsymbol{x}}_B \quad {}^{A}\hat{\boldsymbol{y}}_B \quad {}^{A}\hat{\boldsymbol{z}}_B]=\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_B\cdot\hat{\boldsymbol{x}}_A & \hat{\boldsymbol{y}}_B\cdot\hat{\boldsymbol{x}}_A & \hat{\boldsymbol{z}}_B\cdot\hat{\boldsymbol{x}}_A \\ \hat{\boldsymbol{x}}_B\cdot\hat{\boldsymbol{y}}_A & \hat{\boldsymbol{y}}_B\cdot\hat{\boldsymbol{y}}_A & \hat{\boldsymbol{z}}_B\cdot\hat{\boldsymbol{y}}_A \\ \hat{\boldsymbol{x}}_B\cdot\hat{\boldsymbol{z}}_A & \hat{\boldsymbol{y}}_B\cdot\hat{\boldsymbol{z}}_A & \hat{\boldsymbol{z}}_B\cdot\hat{\boldsymbol{z}}_A \end{bmatrix} \tag{2.7} $$

那么,坐标系$\{A\}$相对于坐标系$\{B\}$姿态矩阵应如何表示呢?按照式(2.7)的表示方式,可以把${}^{B}_{A}\boldsymbol{R}$写成矩阵形式为

$$ {}^{B}_{A}\boldsymbol{R}=[{}^{B}\hat{\boldsymbol{x}}_A \quad {}^{B}\hat{\boldsymbol{y}}_A \quad {}^{B}\hat{\boldsymbol{z}}_A]=\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_A\cdot\hat{\boldsymbol{x}}_B & \hat{\boldsymbol{y}}_A\cdot\hat{\boldsymbol{x}}_B & \hat{\boldsymbol{z}}_A\cdot\hat{\boldsymbol{x}}_B \\ \hat{\boldsymbol{x}}_A\cdot\hat{\boldsymbol{y}}_B & \hat{\boldsymbol{y}}_A\cdot\hat{\boldsymbol{y}}_B & \hat{\boldsymbol{z}}_A\cdot\hat{\boldsymbol{y}}_B \\ \hat{\boldsymbol{x}}_A\cdot\hat{\boldsymbol{z}}_B & \hat{\boldsymbol{y}}_A\cdot\hat{\boldsymbol{z}}_B & \hat{\boldsymbol{z}}_A\cdot\hat{\boldsymbol{z}}_B \end{bmatrix} \tag{2.8} $$

比较式(2.7)与式(2.8),显然得

$$ {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}=({}^{B}_{A}\boldsymbol{R})^{\mathrm{T}} $$

利用正交约束条件,参见式(2.6),进一步可以推得

$$ \begin{gathered} ({}^{B}_{A}\boldsymbol{R})^{\mathrm{T}}\,{}^{B}_{A}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I} \\ {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}=({}^{B}_{A}\boldsymbol{R})^{-1}=({}^{B}_{A}\boldsymbol{R})^{\mathrm{T}} \end{gathered} \tag{2.9} $$

式中,$\boldsymbol{I}$表示3×3单位矩阵,可以看出姿态矩阵的逆等价于矩阵的转置。

用方向余弦表示旋转矩阵,矩阵包含有九个元素。这九个元素相互依赖,满足式(2.6)的六个约束条件,因而仅需要三个独立参数就可以描述姿态矩阵。但也面临一个问题,即难以从方向余弦旋转矩阵中直观地选择出三个独立参数来表示刚体的空间姿态,这是方向余弦表示方法的缺陷。

【例2.1】 假定动坐标系$\{B\}$开始与定坐标系$\{A\}$重合,动坐标系$\{B\}$绕x轴旋转了θ角后,坐标系$\{B\}$在定坐标$\{A\}$的姿态如图2.12所示,用方向余弦方法表示坐标系$\{B\}$相对于定坐标系$\{A\}$的旋转矩阵。

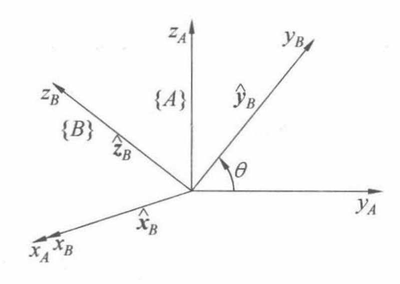


图2.12 绕x轴转动时两坐标系姿态

参照图2.12,利用式(2.7),坐标系$\{B\}$主轴在坐标系$\{A\}$下的方向为

$$ {}^{A}\hat{\boldsymbol{x}}_B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ {}^{A}\hat{\boldsymbol{y}}_B=\begin{bmatrix}0\\\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix},\ {}^{A}\hat{\boldsymbol{z}}_B=\begin{bmatrix}0\\-\sin\theta\\\cos\theta\end{bmatrix} $$

${}^{A}_{B}\boldsymbol{R}$可以表示为

$$ {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix} $$

2.3 点在不同坐标系下的映射

2.3.1 平移映射

设坐标系{B}与{A}具有相同的方向，但两者之间原点不重合，如图2.13所示。图中，${}^{A}\boldsymbol{p}_{BORG}$表示坐标系{$B$}的原点在坐标系{$A$}下的位置矢量。如果点$S$在坐标系{$B$}下的位置矢量为${}^{B}\boldsymbol{p}$，那么它在坐标系{$A$}下的位置矢量定义为${}^{A}\boldsymbol{p}$，可由矢量相加得到，即

$$ {}^{A}\boldsymbol{p}={}^{A}\boldsymbol{p}_{BORG}+{}^{B}\boldsymbol{p} \tag{2.10}$$

2.3.2 旋转映射

假定坐标系{B}与{A}原点重合，但方向不同，如图2.14所示，两坐标系之间的旋转矩阵为${}_{B}^{A}\boldsymbol{R}$。已经知道在坐标系{B}下，S点的位置矢量为${}^{B}\boldsymbol{p}({}^{B}p_x\quad {}^{B}p_y\quad {}^{B}p_z)$，求在坐标系{$A$}下$S$点的位置矢量${}^{A}\boldsymbol{p}$。

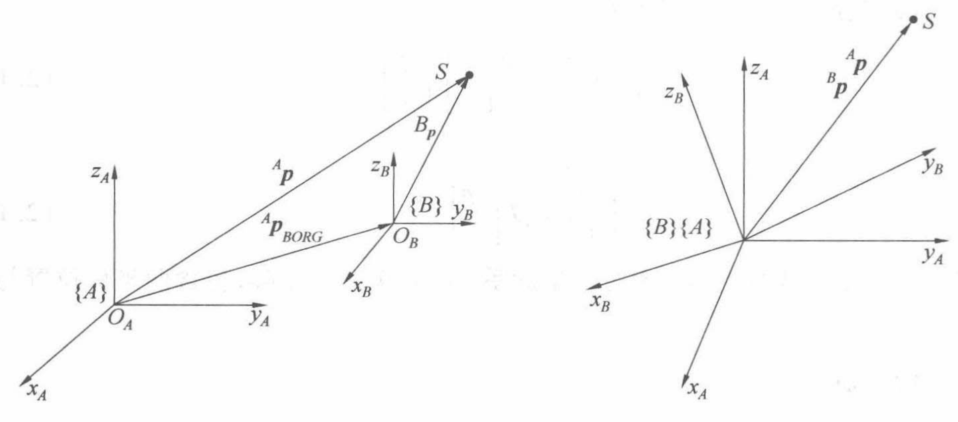


图2.13　点位置矢量平移映射　　　　图2.14　点位置矢量旋转映射

在坐标系{A}下，矢量${}^{A}\boldsymbol{P}$可以表示为

$$ {}^{A}\boldsymbol{p}={}^{B}p_x{}^{A}\hat{\boldsymbol{x}}_B+{}^{B}p_y{}^{A}\hat{\boldsymbol{y}}_B+{}^{B}p_z{}^{A}\hat{\boldsymbol{z}}_B \tag{2.11}$$

改写成矩阵的形式为

$$ {}^{A}\boldsymbol{p}=[{}^{A}\hat{\boldsymbol{x}}_B\quad {}^{A}\hat{\boldsymbol{y}}_B\quad {}^{A}\hat{\boldsymbol{z}}_B]\begin{bmatrix}{}^{B}p_x\\ {}^{B}p_y\\ {}^{B}p_z\end{bmatrix}={}_{B}^{A}\boldsymbol{R}{}^{B}\boldsymbol{p} \tag{2.12}$$

式(2.12)表明两坐标原点重合时，空间同一个点在坐标系{B}下的位置矢量${}^{B}\boldsymbol{p}$映射到坐标系{A}下${}^{A}\boldsymbol{p}$表达方式。此时在不同的坐标系下，点的矢量方向发生改变，模长不变。通常，坐标系{B}原点与坐标系{A}既不重合，方向也不相同，如图2.15所示，${}^{A}\boldsymbol{p}_{BORG}$表示坐标系{$B$}原点在坐标系{$A$}下的位置矢量，${}_{B}^{A}\boldsymbol{R}$表示两坐标系的旋转矩阵，${}^{B}\boldsymbol{p}$已知，求${}^{A}\boldsymbol{p}$。假定存在一个临时坐标系{$S$}，该坐标系与坐标系{$A$}的方向一致，原点与坐标系{$B$}重合。在坐标系{$S$}下，点的位置矢量${}^{S}\boldsymbol{p}$可以表示为

$$ {}^{S}\boldsymbol{p}={}_{B}^{S}\boldsymbol{R}{}^{B}\boldsymbol{p}$$

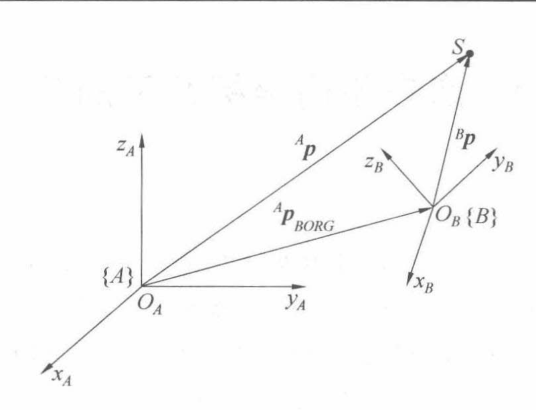


图 2.15　一般的点位置矢量映射

点的位置矢量在坐标系{S}到坐标系{A}的映射为

$$^{A}\boldsymbol{p}={}^{S}\boldsymbol{p}+{}^{A}\boldsymbol{p}_{BORG}$$

合并以上两式为

$$^{A}\boldsymbol{p}={}^{S}_{B}\boldsymbol{R}^{B}\boldsymbol{p}+{}^{A}\boldsymbol{p}_{BORG} \tag{2.13}$$

式(2.13)改写成齐次矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} ^{A}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ^{A}_{B}\boldsymbol{R} & ^{A}\boldsymbol{p}_{BORG} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ^{B}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

简写成

$$\begin{bmatrix} ^{A}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix}={}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\begin{bmatrix} ^{B}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

式中，$^{A}_{B}\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{R}^{4\times4}$矩阵表示坐标系{$B$}相对于坐标系{$A$}齐次变换矩阵，包含两坐标位置与姿态的关系。

2.3.3　复合映射

如图 2.16 所示，图中有{A}，{B}和{C}三个坐标系，各坐标系齐次变换矩阵$^{A}_{B}\boldsymbol{T}$，$^{A}_{C}\boldsymbol{T}$已知，在坐标系{C}下，已知点 S 的位置矢量$^{C}\boldsymbol{p}$，如何求得$^{A}\boldsymbol{p}$。已经知道的关系为

$$^{B}_{C}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} ^{B}_{C}\boldsymbol{R} & ^{B}\boldsymbol{p}_{CORG} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix},\ ^{A}_{B}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} ^{A}_{B}\boldsymbol{R} & ^{A}\boldsymbol{p}_{BORG} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

点 S 在坐标系{C}下的矢量为$^{C}\boldsymbol{p}$，映射到坐标{B}下的矢量$^{B}\boldsymbol{p}$ 为

$$\begin{bmatrix} ^{B}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix}={}^{B}_{C}\boldsymbol{T}\begin{bmatrix} ^{C}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

点 S 在坐标系{B}下的矢量为$^{B}\boldsymbol{p}$，映射到坐标系{A}下的矢量$^{A}\boldsymbol{p}$ 为

$$\begin{bmatrix} ^{A}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix}={}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\begin{bmatrix} ^{B}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

合并以上两式，得

$$\begin{bmatrix} A\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix}={}^{A}_{B}\boldsymbol{T}^{B}_{C}\boldsymbol{T}\begin{bmatrix} C\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

坐标系{C}相对坐标系{A}的齐次变换矩阵为

$$ {}_{C}^{A}\boldsymbol{T} = {}_{B}^{A}\boldsymbol{T}{}_{C}^{B}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} {}_{B}^{A}\boldsymbol{R}{}_{C}^{B}\boldsymbol{R} & {}_{B}^{A}\boldsymbol{R}{}^{B}\boldsymbol{p}_{CORG} + {}^{A}\boldsymbol{p}_{BORG} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} $$

在坐标系$\{C\}$下点的位置矢量，左乘${}_{C}^{A}\boldsymbol{T}$即可得出此点在坐标系$\{A\}$下的位置矢量，对于多坐标系之间的映射，也可以参照上述方法，得出点在不同坐标系下的映射，并得出各坐标系之间的齐次变换矩阵。

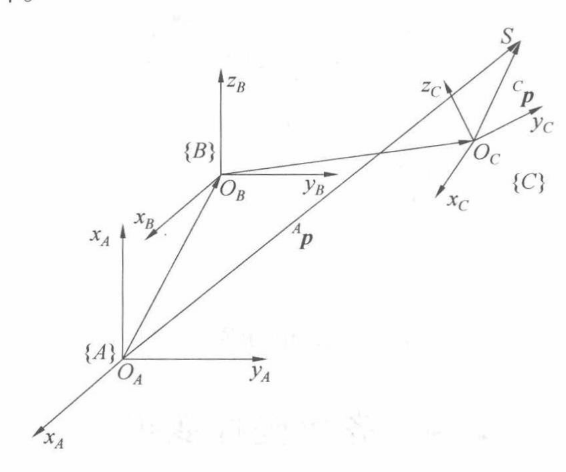


图2.16　点的复合映射

2.3.4　齐次矩阵的逆

坐标系$\{B\}$相对于坐标系$\{A\}$的齐次矩阵描述为${}_{B}^{A}\boldsymbol{T}$，但是在机器人运动学、动力学的计算中，为了简化计算，存在空间点的位置矢量在不同坐标系下的相互转换问题。例如，已知点在坐标系$\{B\}$下位置矢量，当前计算需要变换到坐标系$\{A\}$下，计算完成后又需要变换到坐标系$\{B\}$下，这里就需要解决坐标系$\{A\}$相对于坐标系$\{B\}$的描述${}_{A}^{B}\boldsymbol{T}$，此问题是齐次矩阵求逆的问题，可以按照以前所学的数学知识，对4×4齐次变换矩阵求逆，也可以利用两坐标系齐次变换矩阵特殊性质求逆。下面讨论齐次变换矩阵的求逆方法。

已知坐标系$\{B\}$相对于坐标系$\{A\}$的齐次变换矩阵为${}_{B}^{A}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} {}_{B}^{A}\boldsymbol{R} & {}^{A}\boldsymbol{p}_{BORG} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$，矩阵${}_{A}^{B}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} {}_{A}^{B}\boldsymbol{R} & {}^{B}\boldsymbol{p}_{AORG} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$的求解步骤如下。

首先根据已知的${}_{B}^{A}\boldsymbol{R}$计算${}_{A}^{B}\boldsymbol{R}$，根据式(2.9)，得

$$ {}_{A}^{B}\boldsymbol{R} = ({}_{B}^{A}\boldsymbol{R})^{\mathrm{T}} $$

利用${}^{A}\boldsymbol{p}_{BORG}$计算${}^{B}\boldsymbol{p}_{AORG}$，如图2.17所示，并根据式(2.13)得

$$ {}^{B}({}^{A}\boldsymbol{p}_{BORG}) = {}_{A}^{B}\boldsymbol{R}{}^{A}\boldsymbol{p}_{BORG} + {}^{B}\boldsymbol{p}_{AORG} \tag{2.16} $$

显然，矢量${}^{A}\boldsymbol{p}_{BORG}$在坐标系$\{A\}$下所指向的点是坐标系$\{B\}$的原点，在坐标系$\{B\}$下是零矢量，那么式(2.16)左侧为零矢量，可以进一步写为

$$ \boldsymbol{0} = {}_{A}^{B}\boldsymbol{R}{}^{A}\boldsymbol{p}_{BORG} + {}^{B}\boldsymbol{p}_{AORG} $$

即

$$ {}^{B}\boldsymbol{p}_{AORG} = -{}_{A}^{B}\boldsymbol{R}{}^{A}\boldsymbol{p}_{BORG} = -({}_{B}^{A}\boldsymbol{R})^{\mathrm{T}A}\boldsymbol{p}_{BORG} $$

最后得出${}_{A}^{B}\boldsymbol{T}$为

$$
{}_{A}^{B}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} ({}_{B}^{A}\boldsymbol{R})^{\mathrm{T}} & -({}_{B}^{A}\boldsymbol{R})^{\mathrm{T}A}\boldsymbol{p}_{BORG} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.17}
$$

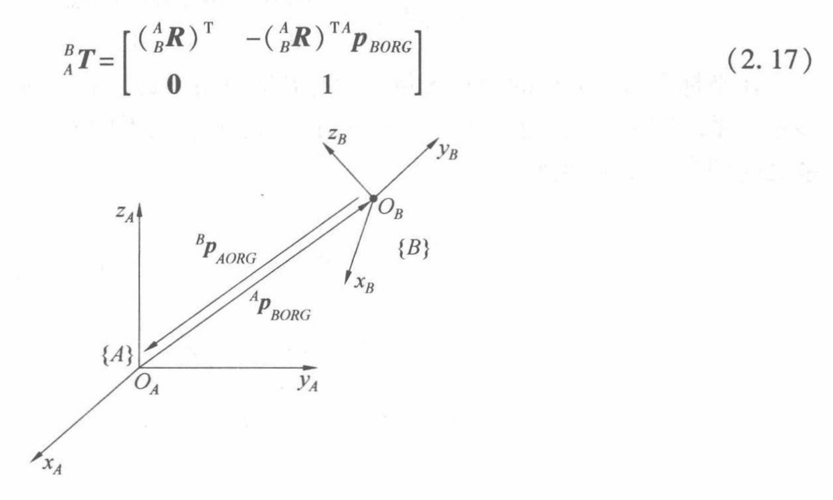


图 2.17 齐次矩阵求逆示意图

2.4 齐次坐标变换

映射表示空间同一点在各坐标系相对关系已知的前提下,在不同的坐标系下的矢量描述。而齐次坐标变换更多体现了刚体在空间的运动,刚体的一般有限运动是指刚体从一个位姿运动到另一个位姿,运动过程伴随着移动和转动。

2.4.1 平移变换

刚体在空间做平移运动,点 S 为刚体上的一个点,如图 2.18 所示,刚体在空间沿着在参考坐标系$\{A\}$下的矢量 $\boldsymbol{q}$ 方向做平移移动,点 S 移动到点 S',开始时刚体上点 S 在坐标系$\{A\}$下的位置矢量为 $\boldsymbol{p}$,运动后点 S'在坐标系$\{A\}$下的位置矢量为 $\boldsymbol{p}'$,此时坐标系$\{A\}$下的 S'点的位置矢量 $\boldsymbol{p}'$可以表示为

$$
\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p} \tag{2.18}
$$

式中,$\boldsymbol{q}=[q_x \quad q_y \quad q_z]^{\mathrm{T}}$ 表示矢量 $\boldsymbol{q}$ 在坐标系$\{A\}$下沿各轴的坐标分量。如果矢量 $\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}$ 用齐次坐标表示,式(2.18)可以改写为

$$
\boldsymbol{p}'=\mathrm{Trans}(q_x,q_y,q_z)\boldsymbol{p} \tag{2.19}
$$

式中,$\mathrm{Trans}(q_x,q_y,q_z)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$表示平移变换或平移运动运算。式(2.18)和(2.19)所有矢量均在坐标系$\{A\}$下表示。

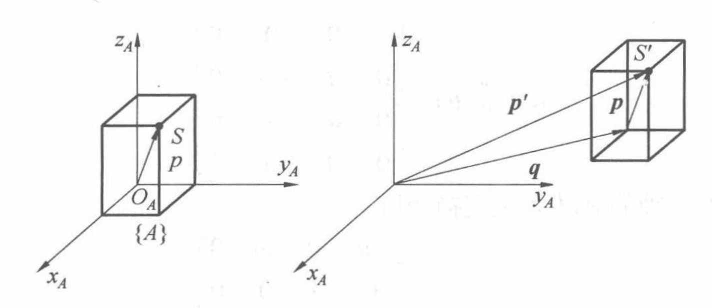


图2.18　平移变换

2.4.2　旋转变换

如图2.19所示,刚体在空间做定点旋转运动,点S为刚体上的一点,初始在参考坐标系$\{A\}$下的矢量为$\boldsymbol{p}$,绕过坐标系$\{A\}$原点的轴线L旋转了θ角,轴线的空间单位方向为$\boldsymbol{e}$,此时点S运动到点S',在坐标系$\{A\}$下的矢量为$\boldsymbol{p}'$。对于刚体空间的旋转运动,可以表示为

$$\boldsymbol{p}'=\mathrm{Rot}(\boldsymbol{e},\theta)\boldsymbol{p} \tag{2.20}$$

式中,Rot表示旋转变换运算,$\mathrm{Rot}(\boldsymbol{e},\theta)$表示在坐标系$\{A\}$下绕过原点单位方向为$\boldsymbol{e}$的轴线旋转$\theta$角。此运算可以写为齐次变换的形式,其位置矢量部分为零。

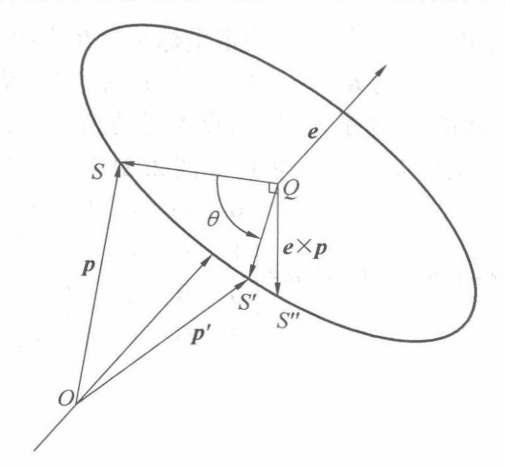


图2.19　绕空间轴线的旋转变换

在坐标系$\{A\}$下,最基本的旋转是绕坐标轴x轴、y轴和z轴的旋转,为了分析方便,如图2.12所示,假定建立一个坐标系$\{B\}$与刚体(未画出)固连,绕坐标系$\{A\}$的x轴旋转θ角,刚体的旋转运动显然可以用两坐标系的瞬时姿态关系表示,旋转后利用式(2.7)可以得出

$$^{A}\hat{\boldsymbol{x}}_B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ ^{A}\hat{\boldsymbol{y}}_B=\begin{bmatrix}0\\c\theta\\s\theta\end{bmatrix},\ ^{A}\hat{\boldsymbol{z}}_B=\begin{bmatrix}0\\-s\theta\\c\theta\end{bmatrix}$$

刚体绕x轴旋转运动的基本旋转齐次变换矩阵可以表示为

$$\text{Rot}(\hat{\boldsymbol{x}},\theta)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&c\theta&-s\theta&0\\0&s\theta&c\theta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

同样,绕 y 轴和 z 轴的旋转齐次变换矩阵为

$$\text{Rot}(\hat{\boldsymbol{y}},\theta)=\begin{bmatrix}c\theta&0&s\theta&0\\0&1&0&0\\-s\theta&0&c\theta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

和

$$\text{Rot}(\hat{\boldsymbol{z}},\theta)=\begin{bmatrix}c\theta&-s\theta&0&0\\s\theta&c\theta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\tag{2.21}$$

式中,$c\theta=\cos\theta$,$s\theta=\sin\theta$,$\hat{\boldsymbol{x}}$ 表示 x 轴的单位方向,其他类似。

1. 绕沿定坐标系运动

已知两坐标系$\{A\}$,$\{B\}$开始时重合,$\{A\}$为定坐标系,$\{B\}$固连于刚体(未画出)与刚体一起运动,刚体上一点为 S 点,矢量为 $\boldsymbol{u}=[6\quad 4\quad 3]^{\mathrm{T}}$,如图 2.20 所示。坐标系$\{B\}$开始绕 z 轴转动 90°,转动后所形成的临时坐标系为$\{B_1\}$,点 S 运动到点 S',在坐标系$\{B_1\}$下,矢量 $\boldsymbol{u}$ 不变,在坐标系$\{A\}$下点 S'的位置矢量表示为${}^{A}\boldsymbol{v}$,如图 2.21 所示,依据式(2.15)计算为

$${}^{A}\boldsymbol{v}={}^{A}_{B_1}T^{B_1}\boldsymbol{u}=\text{Rot}(\hat{\boldsymbol{z}},90°)^{B_1}\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\4\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\6\\3\\1\end{bmatrix}$$

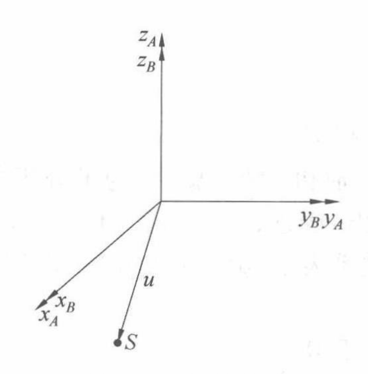


图 2.20　初始位姿

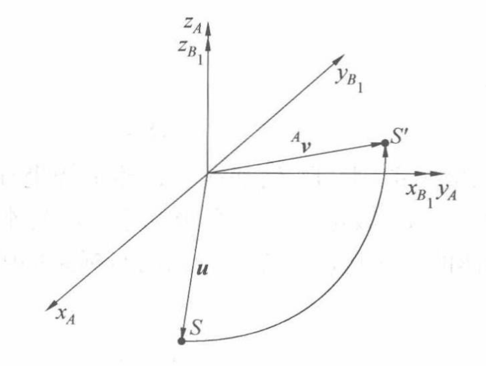


图 2.21　绕 z 轴旋转 90°

如果坐标系$\{B_1\}$继续绕坐标系$\{A\}$的 y 轴方向旋转 90°,形成临时坐标系$\{B_2\}$,点 S'运动到点 S'',在坐标系$\{A\}$下点 S''的位置矢量表示为${}^{A}\boldsymbol{w}$,这一变换可以从图 2.22 中看出,表示为

$${}^{A}\boldsymbol{w}={}^{A}_{B_2}\boldsymbol{T}^{B_2}\boldsymbol{u}$$

显然,在坐标系$\{B_2\}$下,矢量 $\boldsymbol{u}$ 不变。上式中${}^{A}_{B_2}\boldsymbol{T}$ 可以进一步表示为

$$ {}^{A}_{B_2}\boldsymbol{T}=\mathrm{Rot}(\hat{\boldsymbol{y}},90^\circ)\,{}^{A}_{B_1}\boldsymbol{T} $$

以上公式可以解释为：${}^{A}_{B_1}\boldsymbol{T}$ 表示坐标系$\{B_1\}$相对于坐标系$\{A\}$的齐次变换矩阵，第一次旋转后，坐标系$\{B_1\}$相对于坐标系$\{A\}$的齐次变换矩阵${}^{A}_{B_1}\boldsymbol{T}$ 中各列矩阵分别表示坐标系$\{B_1\}$的 x，y 和 z 坐标轴在坐标系$\{A\}$下的方向和原点的位置，第二次旋转，即左乘 $\mathrm{Rot}(\hat{\boldsymbol{y}},90^\circ)$ 表示把此时坐标系$\{B_1\}$在坐标系$\{A\}$下的方向和位置再次变换到坐标系$\{A\}$下，形成临时的坐标系$\{B_2\}$在坐标系$\{A\}$下的方向和位置。如果把上面两次旋转变换组合在一起，那么可以得出

$$ {}^{A}\boldsymbol{w}=\mathrm{Rot}(\hat{\boldsymbol{y}},90^\circ)\,\mathrm{Rot}(\hat{\boldsymbol{z}},90^\circ)\,\boldsymbol{u}=[3\quad 6\quad 4\quad 1]^{\mathrm{T}} $$

因为矩阵的乘法不具有交换性，所以对于刚体绕定坐标系的转动，其变换矩阵要左乘，即变换顺序为从右向左。上述两次旋转变换后，点 S''在定坐标系下平移$[5\quad -2\quad 6]^{\mathrm{T}}$，最终得到点 S'''在定坐标系下的位置为

$$ {}^{A}\boldsymbol{p}_{S'''}=\mathrm{Trans}(5,-2,6)\,\mathrm{Rot}(\hat{\boldsymbol{y}},90^\circ)\,\mathrm{Rot}(\hat{\boldsymbol{z}},90^\circ)\,\boldsymbol{u}=[8\quad 4\quad 10\quad 1]^{\mathrm{T}} $$

如图 2.23 所示，有兴趣的读者可以自己进行计算，检验平移变换是否可以随意左乘与右乘。

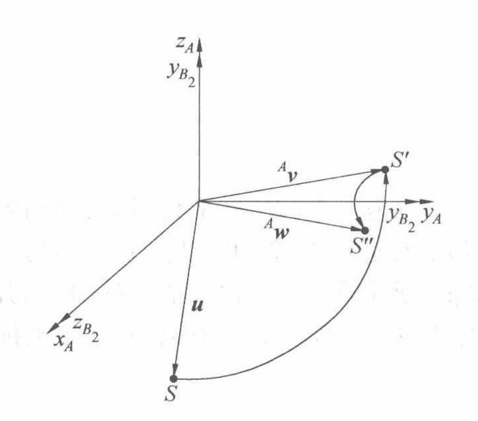


图 2.22　绕定坐标系 y 轴旋转 90°

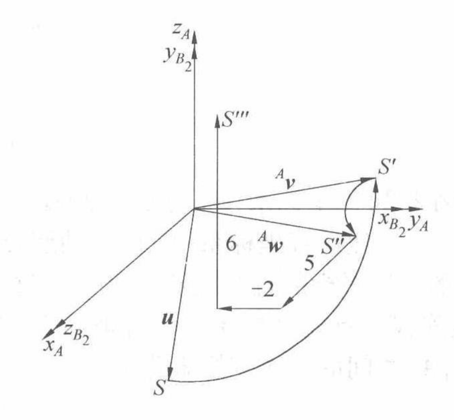


图 2.23　沿定坐标系坐标轴移动

2. 绕沿动坐标系运动

刚体旋转运动，不是绕定坐标系各轴转动，而是绕与自身固连的坐标系转动，其变换顺序又是如何呢？已知两坐标系开始时重合，在坐标系$\{B\}$下点 S 的矢量为 $\boldsymbol{u}=[6\quad 4\quad 3\quad 1]^{\mathrm{T}}$，如图 2.20 所示，点 S 随坐标系$\{B\}$一起运动，首先坐标系$\{B\}$绕 z 轴转动 90°，临时形成的坐标系用$\{B_1\}$表示，在坐标系$\{A\}$下，点的 S 运动到点 S'，如图 2.21 所示，其位置矢量${}^{A}\boldsymbol{v}$ 为

$$ {}^{A}\boldsymbol{v}={}^{A}_{B_1}\boldsymbol{T}^{B_1}\boldsymbol{u}=\mathrm{Rot}(\hat{\boldsymbol{z}},90^\circ)\,\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\4\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\6\\3\\1\end{bmatrix} $$

而后，坐标系$\{B_1\}$绕其自身 y 轴旋转 90°，得到的临时坐标系用$\{B_2\}$表示，如图 2.24 所示，点 S'运动到点 S''，点 S''在坐标系$\{B_1\}$下的位置矢量${}^{B_1}\boldsymbol{w}$ 可以表示为

$$^{B_1}\boldsymbol{w}={}^{B_1}_{B_2}\boldsymbol{T}^{B_2}\boldsymbol{u}=\mathrm{Rot}(\hat{y},90°)\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\4\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\-6\\1\end{bmatrix}$$

点 S''的位置矢量$^{B_1}\boldsymbol{w}$ 从坐标系$\{B_1\}$变换到坐标系$\{A\}$下为

$$^{A}\boldsymbol{w}={}^{A}_{B_1}\boldsymbol{T}^{B_1}\boldsymbol{w}=\mathrm{Rot}(\hat{z},90°)\,^{B_1}\boldsymbol{w}=\mathrm{Rot}(\hat{z},90°)\,\mathrm{Rot}(\hat{y},90°)\,\boldsymbol{u}$$

所以对于刚体绕自身坐标系(或动坐标系)的转动,其变换矩阵要右乘,即变换顺序为从左向右。

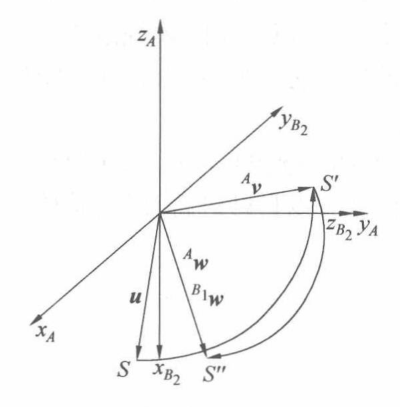


图 2.24 绕动坐标系 y 轴旋转

【例 2.2】 坐标系$\{B\}$初始与坐标系$\{A\}$重合,而后坐标系$\{B\}$做平移运动,移动到点$[5\quad 4\quad 1]^{\mathrm{T}}$,然后绕坐标系$\{B\}$的 x 轴旋转了 30°,最后绕通过点$[2\quad 0\quad 2]^{\mathrm{T}}$且方向与坐标系$\{B\}$的 y 轴平行的直线旋转了 60°,经过上述运动后,求坐标系$\{B\}$相对坐标系$\{A\}$的齐次变换矩阵$^{A}_{B}\boldsymbol{T}$。首先坐标系$\{B\}$沿坐标系$\{A\}$的坐标平移后,临时坐标系记为$\{C\}$,坐标系$\{C\}$与$\{A\}$之间的齐次变换矩阵为

$$^{A}_{C}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&4\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

坐标系$\{B\}$继续运动,绕其自身 x 轴旋转 30°后,临时坐标系记为$\{D\}$,坐标系$\{D\}$与$\{C\}$之间的齐次变换矩阵为

$$^{C}_{D}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\cos 30°&-\sin 30°&0\\0&\sin 30°&\cos 30°&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

为了绕在自身坐标系下,过点$[2\quad 0\quad 2]^{\mathrm{T}}$且与 y 轴平行的轴线旋转 60°,坐标系$\{B\}$先平移到点$[2\quad 0\quad 2]^{\mathrm{T}}$,临时坐标系记为$\{E\}$,坐标系$\{E\}$与$\{D\}$之间的齐次换矩阵为

$$^{D}_{E}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

然后绕 y 轴旋转 60°，旋转完成后，临时坐标系记为 $\{F\}$，坐标系 $\{F\}$ 与 $\{E\}$ 之间的齐次变换矩阵为

$$
{}_F^E\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\cos 60° & 0 & \sin 60° & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -\sin 60° & 0 & \cos 60° & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

最后，平移 $[-2\quad 0\quad -2]^{\mathrm{T}}$，此时坐标系 $\{B\}$ 与坐标系 $\{F\}$ 的齐次变换矩阵为

$$
{}_B^F\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

${}_B^A\boldsymbol{T}$ 最终得到

$$
{}_B^A\boldsymbol{T}={}_C^A\boldsymbol{T}{}_D^C\boldsymbol{T}{}_E^D\boldsymbol{T}{}_F^E\boldsymbol{T}{}_B^F\boldsymbol{T}
$$

2.5　刚体的旋转

2.5.1　欧拉角表示法

刚体在三维笛卡儿空间的运动包含平移与旋转运动，平移运动可使用三个笛卡儿坐标系定义，而转动需要三个旋转角度坐标定义，因此刚体的运动可使用六个坐标完整地确定。在笛卡儿坐标系下，可以通过连续三次且相邻两次旋转不可以绕相同的坐标轴的旋转运动，来描述转动刚体相对于参考坐标系的方向，三个转动的角度参数可作为广义坐标，也称欧拉角。当给定定坐标系和动坐标系后，可以有 24 种不同的旋转次序描述刚体相对于定坐标系的姿态。下面介绍两种最常用的欧拉角。

1. z-y-z 欧拉角

定、动坐标系自重合位姿开始，动坐标系首先绕 z 轴转动 α 角，接着绕自身 y 轴转动 β 角，最后再绕其自身 z 轴转动 γ 角，其旋转过程如图 2.25 所示，旋转后，坐标系 $\{B\}$ 相对于坐标系 $\{A\}$ 的方向矩阵为

$$
{}_B^A\boldsymbol{R}_{zyz}=\mathrm{Rot}(\hat{z},\alpha)\mathrm{Rot}(\hat{y},\beta)\mathrm{Rot}(\hat{z},\gamma)=
\begin{bmatrix}c\alpha & -s\alpha & 0\\ s\alpha & c\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\beta & 0 & s\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -s\beta & 0 & c\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\gamma & -s\gamma & 0\\ s\gamma & c\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\tag{2.22}
$$

式中，${}_B^A\boldsymbol{R}_{zyz}$ 称为 z-y-z 欧拉角变换。以上矩阵相乘，得

$$
{}_B^A\boldsymbol{R}_{zyz}=\begin{bmatrix}c\alpha c\beta c\gamma-s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma-s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta\\ s\alpha c\beta c\gamma+c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma+c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta\\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta\end{bmatrix}\tag{2.23}
$$

若刚体的旋转矩阵给定为

$$ {}_B^A\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \tag{2.24} $$

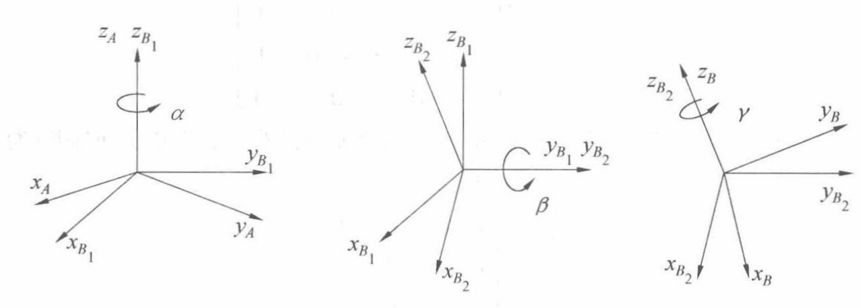


图 2.25 zyz 欧拉角

为了求得 z-y-z 欧拉角变换的三个欧拉角，令

$$ {}_B^A\boldsymbol{R}_{zyz}={}_B^A\boldsymbol{R} $$

首先，假定 r_{13}，r_{23}不全为零，那么可以知道 $s\beta\neq0$，$\beta\neq0$ 或 $\beta\neq180°$，即 r_{31}，r_{32}不全为零，$r_{33}\neq\pm1$。那么三个欧拉角可以表示为

$$ \begin{aligned} &\beta=\text{atan2}(\sqrt{r_{31}^2+r_{32}^2},r_{33}) \\ &\alpha=\text{atan2}(r_{23}/s\beta,r_{13}/s\beta) \\ &\gamma=\text{atan2}(r_{32}/s\beta,-r_{31}/s\beta) \end{aligned} \tag{2.25} $$

虽然 β 角存在第二个解，但在式(2.25)中计算得到的 β 角的值域为 $0<\beta<180°$，绕 z 轴、y 轴和 z 轴依次转动计算所得的 α，β 和 γ 角度，可得出给定的旋转矩阵${}_B^A\boldsymbol{R}$ 所表示的方向。如果 $\beta=0$ 或 $\beta=180°$，意味着 $r_{13}=r_{23}=0$，$r_{31}=r_{32}=0$，此时的解出现退化，矩阵${}_B^A\boldsymbol{R}$ 有以下的形式：

$$ {}_B^A\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{bmatrix} $$

如果 $r_{33}=1$，此时 $\beta=0.0$，${}_B^A\boldsymbol{R}_{zyz}$矩阵变为

$$ {}_B^A\boldsymbol{R}_{zyz}=\begin{bmatrix} c\alpha c\gamma-s\alpha s\gamma & -c\alpha s\gamma-s\alpha c\gamma & 0 \\ s\alpha c\gamma+c\alpha s\gamma & -s\alpha s\gamma+c\alpha c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c(\alpha+\gamma) & -s(\alpha+\gamma) & 0 \\ s(\alpha+\gamma) & c(\alpha+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

那么 $\alpha+\gamma$ 得

$$ \alpha+\gamma=\text{atan }2(r_{11},r_{21}) $$

如果 $r_{33}=-1$，此时 $\beta=180°$，${}_B^A\boldsymbol{R}_{zyz}$矩阵变为

$$ {}_B^A\boldsymbol{R}_{zyz}=\begin{bmatrix} -c(\alpha-\gamma) & -s(\alpha-\gamma) & 0 \\ s(\alpha-\gamma) & c(\alpha-\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

那么 $\alpha-\gamma$ 得

$$ \alpha-\gamma=\text{atan2}(-r_{11},-r_{12}) $$

如果出现解退化的情况，习惯令 $\alpha=0$，那么上述两种特殊情况所对应的解如下。

如果 $\beta=0$，一种解的情况为

$$\begin{aligned}&\beta=0\\&\alpha=0\\&\gamma=\operatorname{atan}2(-r_{12},r_{11})\end{aligned}\tag{2.26}$$

如果 $\beta=180.0°$，一种解的情况为

$$\begin{aligned}&\beta=180°\\&\alpha=0\\&\gamma=\operatorname{atan}2(r_{12},-r_{11})\end{aligned}\tag{2.27}$$

2. RPY 方式

另一种表示转动的欧拉角为滚动(Roll)、俯仰(Pitch)和偏转(Yaw)角(简称 RPY 角)，这种转动方式主要用于航空、航海、机器人末端姿态描述等运动分析中，如图 2.26 所示。它的转动次序依次绕定坐标系的 x 轴转动 ψ 角，绕 y 轴转动 θ 角，绕 z 轴转动 φ 角，三次旋转变换计算如下：

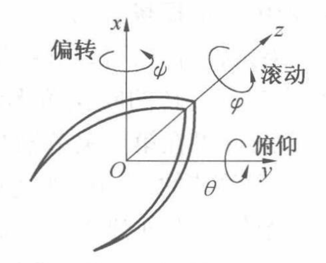


图 2.26　RPY 欧拉角

$$\begin{aligned}{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}_{xyz}&=\operatorname{Rot}(\hat{z},\varphi)\operatorname{Rot}(\hat{y},\theta)\operatorname{Rot}(\hat{x},\psi)=\\&\begin{bmatrix}c\varphi&-s\varphi&0\\s\varphi&c\varphi&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\theta&0&s\theta\\0&1&0\\-s\theta&0&c\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&c\psi&-s0\\0&s\psi&c\psi\end{bmatrix}=\\&\begin{bmatrix}c\varphi c\theta&c\varphi s\theta s\psi-s\varphi c\psi&c\varphi s\theta c\psi+s\varphi s\psi\\s\varphi c\theta&s\varphi s\theta s\psi+c\varphi c\psi&s\varphi s\theta c\psi-c\varphi s\psi\\-s\theta&c\theta s\psi&c\theta c\psi\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{2.28}$$

给定 ${}^{A}_{B}\boldsymbol{R}$，见式(2.24)，如果 $c\beta\neq0$，三个欧拉角可以解为

$$\begin{aligned}&\theta=\operatorname{atan}2(-r_{31},\sqrt{r_{11}^{2}+r_{21}^{2}})\\&\varphi=\operatorname{atan}2(r_{21}/c\theta,r_{11}/c\theta)\\&\psi=\operatorname{atan}2(r_{32}/c\theta,r_{33}/c\theta)\end{aligned}\tag{2.29}$$

在式(2.29)中，尽管 θ 存在第二个解，但通常计算所得的 θ 值域为[−90°,90°]，这样可以保证姿态的表示和三个欧拉角一一对应，但同时也要注意在某些情况下，给定旋转矩阵计算出所有解也是必要的。当 $\theta=\pm90°$，式(2.29)的解退化，此时可以按照惯例定义，通常令 $\varphi=0$，则当前解表示如下：

如果 $\theta=90°$，一种解的情况为

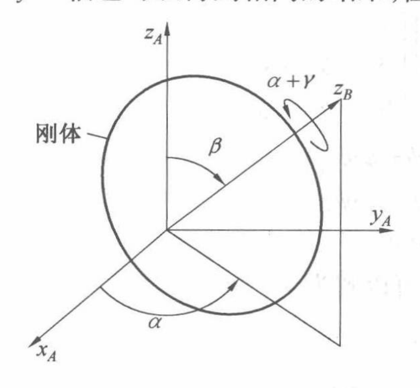
$$\theta = 90°$$
$$\varphi = 0 \tag{2.30}$$
$$\psi = \text{atan } 2(r_{12}, r_{22})$$

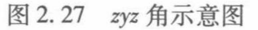
如果 $\theta=-90°$,一种解的情况为

$$\theta = -90°$$
$$\varphi = 0 \tag{2.31}$$
$$\psi = -\text{atan } 2(r_{12}, r_{22})$$

通过对以上两种欧拉角的分析得知,对于绕自身旋转的 *zyz* 角,当 $\beta=0$ 或 $\beta=180°$,解出现退化,对于绕定坐标系旋转的 RPY 角,当 $\theta=\pm 90°$时,解出现退化。*zyz* 角的优点在于几何意义直观明确,对于一个给定的 *zyz* 角,可以迅速将刚体的姿态想象出来,如图 2.27 所示。RPY 角的优点主要有两个:一是由于存在各种约束,机器人工作空间内各 RPY 角的变化范围一般都不会超过$-90°\sim 90°$,具有唯一性;而 *zyz* 角中的 α 角的变化范围为$-\infty\sim+\infty$,因而用 *zyz* 角表达并不唯一;二是 *zyz* 角的退化点为 $\beta=0°$,这个点一般位于正常的工作空间内,而 RPY 角虽然在 $\theta=\pm 90°$时也产生了退化,但该点经常位于工作空间之外,故一般不会对分析计算产生影响。因此,在实际应用中应根据场合的需要决定采用 *zyz* 角还是 RPY 角。

绕自身坐标系旋转的欧拉角如果选择合理,可以和机器人关节实际转动符合,在分析机构运动时具有较强的直观性,这是绕定系旋转的欧拉角无法比拟的,如图 2.28 所示的空间 3R 开链手臂,关节转动轴相交于一点,如果在第 1 关节轴线与基座交点处建立定坐标系,在机械手末端建立工具坐标系,那么三个关节的运动必然造成工具坐标系方向相对于定坐标系的变化,为了描述这种变化,在关节轴交点处建立一个临时坐标系$\{B\}$,坐标轴与关节轴线重合,开始时此坐标系与定坐标系方向重合,如果选择绕此坐标系 *z-y-x* 轴转动来描述工具坐标系的姿态,显然三个欧拉角与三个关节的实际转动角度相符。如果采用绕定坐标系的 *x-y-z* 轴也可以得到相同的结果,但缺乏直观性。




图 2.27 *zyz* 角示意图

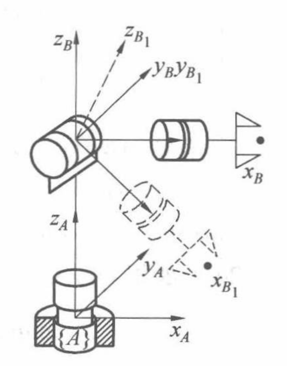


图 2.28 三关节手臂绕第 2 关节转动

2.5.2 一般的旋转变换

前面已经研究了绕轴 *x* 轴、*y* 轴或 *z* 轴的基本旋转变换矩阵,根据欧拉定理:刚体绕定点的任意有限转动可由绕过该点某轴的一次有限转动实现,现在研究最一般的旋转变换情况,即旋转轴不与任何参考系的轴线重合,而是绕参考系中从原点出发的某一矢量旋转一个角度时的旋转矩阵。如图 2.19 所示,考虑空间点 S 绕直线 L 旋转角度 θ 得到 S',直线 L 的单

位矢量为 $\boldsymbol{e}=[e_x \quad e_y \quad e_z]^{\mathrm{T}}$。

从图 2.19 可以明显看出

$$\boldsymbol{p}'=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QS'} \tag{2.32}$$

式中，$\overrightarrow{OQ}$是 $\boldsymbol{p}$ 沿矢量 $\boldsymbol{e}$ 的轴向平行分量，表示为

$$\overrightarrow{OQ}=(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P \tag{2.33}$$

从图 2.19 可以看出

$$\overrightarrow{QS'}=(\cos\theta)\overrightarrow{QS}+(\sin\theta)\overrightarrow{QS''} \tag{2.34}$$

其中，$\overrightarrow{QS}$是 $\boldsymbol{p}$ 的与 $\boldsymbol{e}$ 垂直的分量，即

$$\overrightarrow{QS}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{p} \tag{2.35}$$

并且$\overrightarrow{QS''}$为

$$\overrightarrow{QS''}=\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{p} \tag{2.36}$$

式中，$\boldsymbol{E}$ 是矢量 $\boldsymbol{e}$ 构造得出的斜对称矩阵，即

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0 & -e_z & e_y\\ e_z & 0 & -e_x\\ -e_y & e_x & 0\end{bmatrix}$$

将式(2.35)和式(2.36)代入式(2.34)，得

$$\overrightarrow{QS'}=\cos\theta(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{p}+\sin\theta\boldsymbol{E}\boldsymbol{p} \tag{2.37}$$

将式(2.33)和式(2.37)代入式(2.32)，得

$$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}+\cos\theta(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{p}+\sin\theta\boldsymbol{E}\boldsymbol{p} \tag{2.38}$$

式(2.38)说明，$\boldsymbol{p}'$是 $\boldsymbol{p}$ 的垂直分量绕 $\boldsymbol{e}$ 旋转 θ 角后与 $\boldsymbol{p}$ 的轴向平行分量的合成，式(2.38)简化为

$$\boldsymbol{p}'=[\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}+\cos\theta(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}})+\sin\theta\boldsymbol{E}]\boldsymbol{p} \tag{2.39}$$

式中$[\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}+\cos\theta(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}})+\sin\theta\boldsymbol{E}]$矩阵，就是所求的旋转变换矩阵，即

$$\boldsymbol{R}=\mathrm{Rot}(\boldsymbol{e},\theta)=\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}+\cos\theta(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}})+\sin\theta\boldsymbol{E} \tag{2.40}$$

在特殊情况下，当 $\theta=\pi$ 时

$$\boldsymbol{R}=-\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}$$

显然，当 $\theta=\pi$ 时，$\boldsymbol{R}$ 是对称矩阵；当 $\theta=0$ 时，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$。前面所研究的绕坐标系各轴的基本旋转变换，可利用上面推导得出。例如，绕 x 轴的旋转变换矩阵为

$$\boldsymbol{e}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

代入式(2.40)，绕 x 轴旋转为

$$\boldsymbol{R}_{\hat{x}}(\theta)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&c\theta&-s\theta\\0&s\theta&c\theta\end{bmatrix}$$

同理，可以求得绕过原点方向为 $\boldsymbol{e}$ 的直线 L，旋转 θ 角的旋转矩阵为

$$\boldsymbol{R}_e(\theta)=\begin{bmatrix} e_xe_xv\theta+c\theta & e_xe_yv\theta-e_zs\theta & e_xe_zv\theta+e_ys\theta \\ e_xe_yv\theta+e_zs\theta & e_ye_yv\theta+c\theta & e_ye_zv\theta-e_xs\theta \\ e_xe_zv\theta-e_ys\theta & e_ye_zv\theta+e_xs\theta & e_ze_zv\theta+c\theta \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

式中,$c\theta=\cos\theta, s\theta=\sin\theta, v\theta=1-\cos\theta$。转动角 θ 的符号通过右手法则确定,拇指指向 $\boldsymbol{e}$ 的正向。

如果给定一个旋转矩阵(式(2.24)),可以求得等效的转动轴和转动角。令

$$\boldsymbol{R}_e(\theta)={}_B^A\boldsymbol{R}$$

上式两边的对角线项分别相加,并简化,得

$$r_{11}+r_{22}+r_{33}=1+2c\theta$$

进一步,得

$$\theta=\mathrm{acos}\left(\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}-1}{2}\right) \tag{2.42}$$

非对角线项成对相减,得

$$\boldsymbol{e}=\frac{1}{2s\theta}\begin{bmatrix} r_{32}-r_{23} \\ r_{13}-r_{31} \\ r_{21}-r_{12} \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

θ 解得值域为[0 180°],上述解写可以写为($\boldsymbol{e},\theta$),但也要注意在空间存在另外一个解($-\boldsymbol{e},-\theta$),因此从旋转矩阵变化成等效的转轴、转角表示面临解选择的问题。同时,小角度转动可能造成解的病态,当 $\theta=0$ 或 $\theta=180°$,将会无法求解。

2.5.3 Euler-Rodrigues 参数

另外有一种对姿态的表示方式,可以采用四个元素,构成欧拉-罗德里格斯参数(Euler-Rodrigues)或四元数。四元数本身有以下特点:①四元数不会产生欧拉角表示旋转存在的在0°或90°的解退化问题;②四元数由四个数组成,旋转矩阵需要九个数;③两个四元数之间更容易插值,在姿态插补时更平滑;④四元数、矩阵多次运算后产生计算累计误差,需要分别对其做规范化和正交化,对四元数规范化更容易;⑤与旋转矩阵类似,两个四元数相乘表示两次旋转。因此,在当今工业机器人控制器内机器人运动学的计算大多采用四元数法。

如果已知等效的轴 $\boldsymbol{e}$ 和等效的角 θ,Euler-Rodrigues 参数可以定义为

$$q_0=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right),\boldsymbol{q}_v=\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{e} \tag{2.44}$$

式(2.44)可以分开写为

$$\begin{cases} q_0 = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ q_1 = \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e_x \\ q_2 = \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e_y \\ q_3 = \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e_z \end{cases} \tag{2.45}$$

Euler-Rodrigues 参数用 q_0 和 $\boldsymbol{q}_v$ 来表示旋转，这是一种利用四个参数来表示旋转的形式，因而也称四元数法。Euler-Rodrigues 参数如何表示为一种旋转，详细过程请参考附录 A，通过其推导过程，其物理意义一目了然。显然，四个分量符合以下约束条件：

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \tag{2.46}$$

根据附录 A 式(45)，由四元数构成的旋转矩阵为

$$\boldsymbol{R}_q = \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix}$$

如果给定旋转矩阵，则 Euler-Rodringues 参数可以计算为

$$\begin{cases} q_0 = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+r_{11}+r_{22}+r_{33}} \\ q_1 = \dfrac{r_{32}-r_{23}}{4q_0} \\ q_2 = \dfrac{r_{13}-r_{31}}{4q_0} \\ q_3 = \dfrac{r_{21}-r_{12}}{4q_0} \end{cases} \tag{2.47}$$

注意，如果旋转矩阵表示绕某轴旋转 180°，则 $q_0 = 0$，无法利用公式(2.47)计算 Euler-Rodringues 参数。此时，参数可以利用以下公式计算：

$$\begin{cases} q_0 = 0 \\ q_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+r_{11}-r_{22}-r_{33}} \\ q_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+r_{22}-r_{33}-r_{11}} \\ q_3 = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+r_{33}-r_{11}-r_{22}} \end{cases} \tag{2.48}$$

参考附录 A 式(51)，注意到 Euler-Rodringues 参数 $[0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^{\mathrm{T}}$ 和 $[0 \quad -q_1 \quad -q_2 \quad -q_3]^{\mathrm{T}}$ 表示的旋转相同，所以公式也无法确定此时四元数矢量部分参数的正负号，因此需要一种通常的处理方法，该方法参见附录 B。

本章小结

本章在得出两坐标系之间描述位置与姿态的方式后，用齐次变换矩阵描述空间相同的点在不同坐标系下的位置映射，可以知道机器人任务空间点的位置可以通过映射的方法，得出在不同坐标系下的位置矢量。本章采用齐次变换矩阵描述刚体的运动，其与点在不同坐标系下的映射有相似之处，但映射更多地体现了一种静态的关系，而变换用来分析刚体的运动，体现了一种动态的关系，要注意两者之间的细微差异。本章的内容为其后运动学的分析提供了基本的理论基础。

第 3 章　机器人正逆运动学

目前，工业上常用的机器人机械结构从机构学角度看大多属于串联机构，对其进行运动学分析是其动力学、运动控制的基础。串联机器人运动学分析包括正运动学问题及逆运动学问题。机器人运动涉及两个空间，即关节空间和任务空间的映射问题，机器人末端在任务空间运动，在空间的位置与姿态由各驱动关节驱动，在已知各驱动关节位置参数的前提下，确定机器人末端的位置和姿态称为正运动学，可简单理解为运动从关节空间映射到任务空间。正运动学分析可以应用于确定任务空间大小、标定机器人几何参数等方面。本章引入 Denavit-Hartenberg 表示方法，用以唯一确定各相邻杆件的位置和姿态，从而描述某一时刻机器人的整体结构（Architecture）或者是位形（Configuration）。

3.1　机器人运动链描述

如图 3.1 所示，从机构学的角度看，串联机器人一般是空间开链机构。通常第一个杆件称为机器人基座（Base），最后一个杆件称为末端执行器（End-effector, EE），其运动链（Kinematics Chain）是由一系列杆件通过不同的运动副或者关节连接而成，关节连接两个杆件，限制了两者的相对运动。关节有两种基本形式，即转动副 R（Revolute）和移动副 P（Prismatic）。如果一个关节自由度为 $m(m>1)$，通常拆成 m 个单自由度的 R 副或者 P 副，其连接杆的长度为 0。各驱动关节的位置用实数表示，例如，转动 R 用角度表述、移动副 P 用长度来表述。本书约定各杆件进行编号的顺序分别为 $0,1,2,\cdots,n$，各关节编号顺序为 $1,2,\cdots,n$，其中第 i 个关节连接第 $i-1$ 和第 i 个连杆，这样，n 自由度的机器人由 $n+1$ 个杆件和 n 个关节组成，由基座开始任何一个后面的杆件都通过 R 副或 P 副和前面的杆件相连。

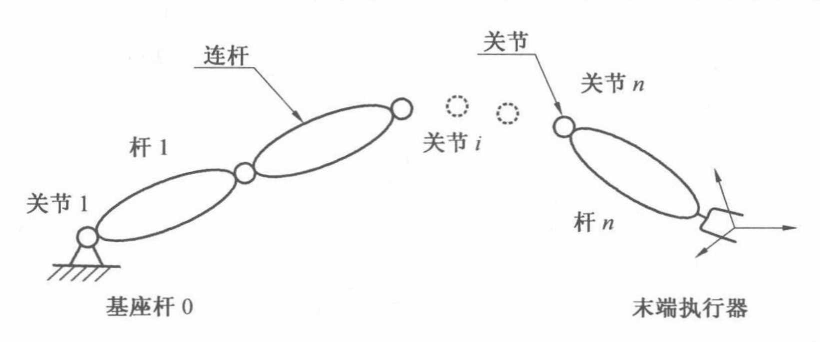


图 3.1　机器人运动链

3.2 机器人运动 D-H 表示法

3.2.1 D-H 参数的几何意义

1. 单杆几何参数

分析机器人运动链中的第 i-1 个连杆,假定 i-1 连杆不是基座和末端的连杆,此时连杆是单独的刚体,其前后端连接第 i-1 和 i 关节。通过观察可以发现,无论连杆在空间如何运动,其两端关节轴线的距离和其夹角不会发生改变,因此可通过此两个参数定义两条轴线的相对位姿。如图 3.2 所示,轴线的距离度量沿着轴线的公垂线方向,从 i-1轴指向 i 轴,称为连杆长度(Link Length),用符号 a_{i-1} 表示。如图 3.3 所示,假设存在一个平面,其法矢量为两轴的公垂线的单位方向,其方向由关节 i-1 轴线指向关节 i 轴线,两轴线投影到此平面,遵循右手规则,其角度度量从关节 i-1 轴线方向转动到关节 i 轴线方向,此角度称之为扭角(Twist Angle),用 α_{i-1} 表示。

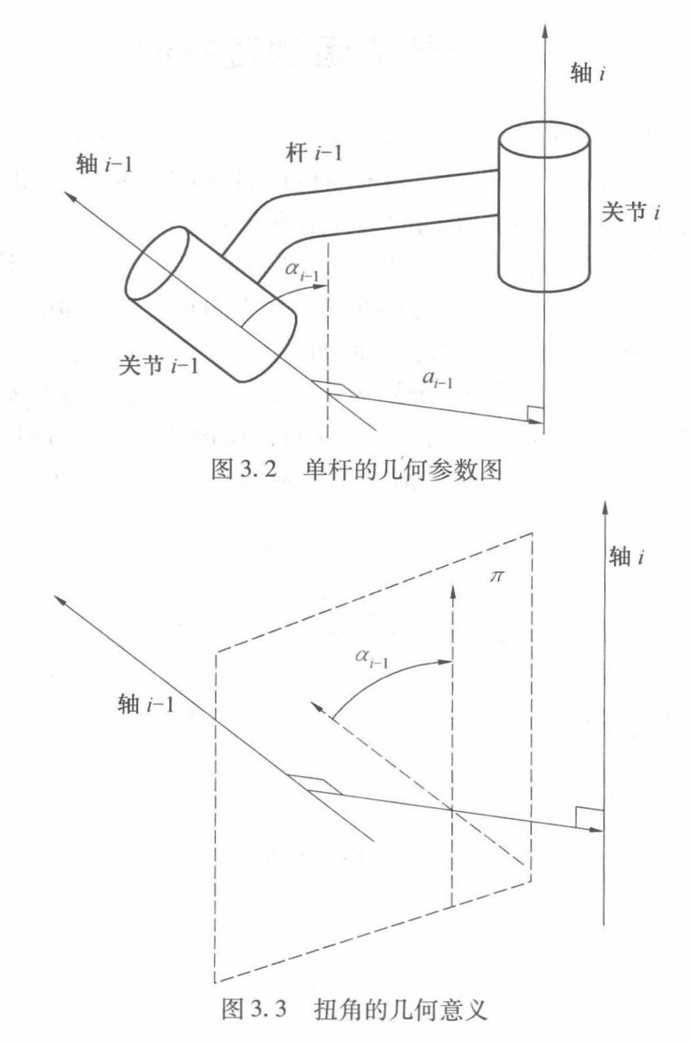


图 3.2 单杆的几何参数图

图 3.3 扭角的几何意义

2. 相邻杆件几何参数

如图 3.4 所示，相邻杆 $i-1$ 和杆 i 有共同的轴线，沿着此轴线正向方向，两连杆的各自两端轴线的公垂线之间的距离，定义为连杆偏置(Link Offset)，用符号 d_i 表示，如果关节 i 是一个转动副，则 d_i 是常量；如果关节 i 是移动副，则 d_i 为变量。两连杆绕共同的轴线转动的角度定义为关节角(Joint Aangle)，用符号 θ_i 表示，如果此关节是转动副，则 θ_i 是变量，即相邻杆各自两端轴线公垂线的夹角；如果是移动副，则 θ_i 为常量。

注意，各几何参数下标的编号要一致，如单杆几何参数 a_{i-1}，α_{i-1} 与杆件编号一致，变量 d_i 或者 θ_i 表示相邻杆之间的几何参数，要与连接两连杆的关节编号一致。

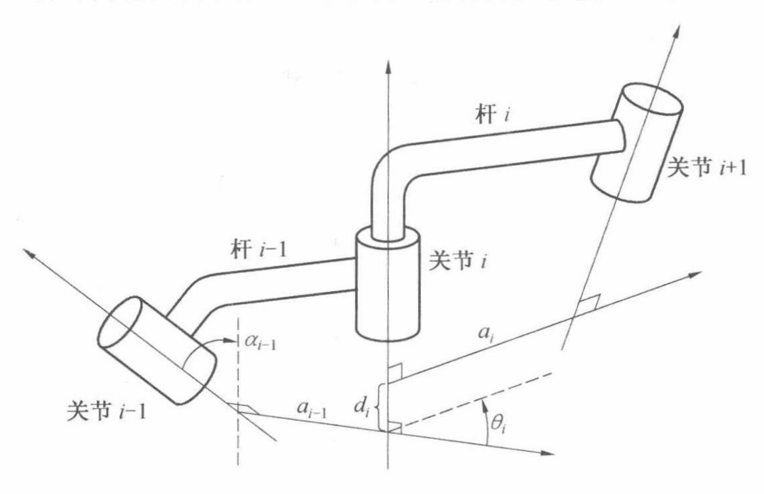


图 3.4　相邻连杆的几何参数

3.2.2　D-H 坐标系的建立

本书约定，所建立的坐标系 F_i 固连于连杆 $i-1$，而不是第 i 个杆，其中 $i=1,2,\cdots,n+1$。建立笛卡儿坐标系要确定原点的位置以及各坐标轴的方向，如果机器人机构含有 $n+1$ 个连杆，则坐标系建立如下规则：

(1)首先确定各坐标系 z 轴，用 z_i 表示 F_i 坐标系的 z 轴，与第 i 关节的轴线重合，其正方向按照表示方便的原则自由定义。移动副的 z_i 轴可以放在任意位置，因为移动副只有方向的定义。

(2)在确定各坐标系 z 轴位置和方向的前提下，进一步确定坐标系 F_i 的 x 轴方向和坐标原点，在关节 $i-1$ 和关节 i 建立的 z_{i-1} 轴和 z_i 轴。在几何上，其空间位置有交叉、相交和平行三种情况，下面分别讨论在此三种情况下如何建立坐标系的 x 轴和原点。

1. 轴线空间交叉

如图 3.5(a)所示，x_i 垂直于 z_{i-1} 和 z_i，其方向从 z_{i-1} 指向 z_i，O_i 为 x_i 与 z_i 的垂直交点。

2. 轴线相交

如图 3.5(b)所示，如果 z_{i-1} 和 z_i 两轴相交，不能按照空间交叉的情况定义 x_i 轴的正向，此正向可以按照左手法则或右手法则确定，从 z_{i-1} 轴转动到 z_i 轴，拇指指向的方向为 x_i 的正向，O_i 为 z_{i-1} 与 z_i 的交点。

3. 轴线平行

如果 z_{i-1} 和 z_i 两轴平行，其公垂线有无数条，则 x_i 轴的位置没有定义，一般而言，为了唯一确定 x_i 的位置，x_i 应过原点 O_{i-1}。但在特殊境况下，为了分析方便，x_i 沿 z_i 平移，与 z_i 交点即为 O_i，如图 3.5(c) 中虚线所示。

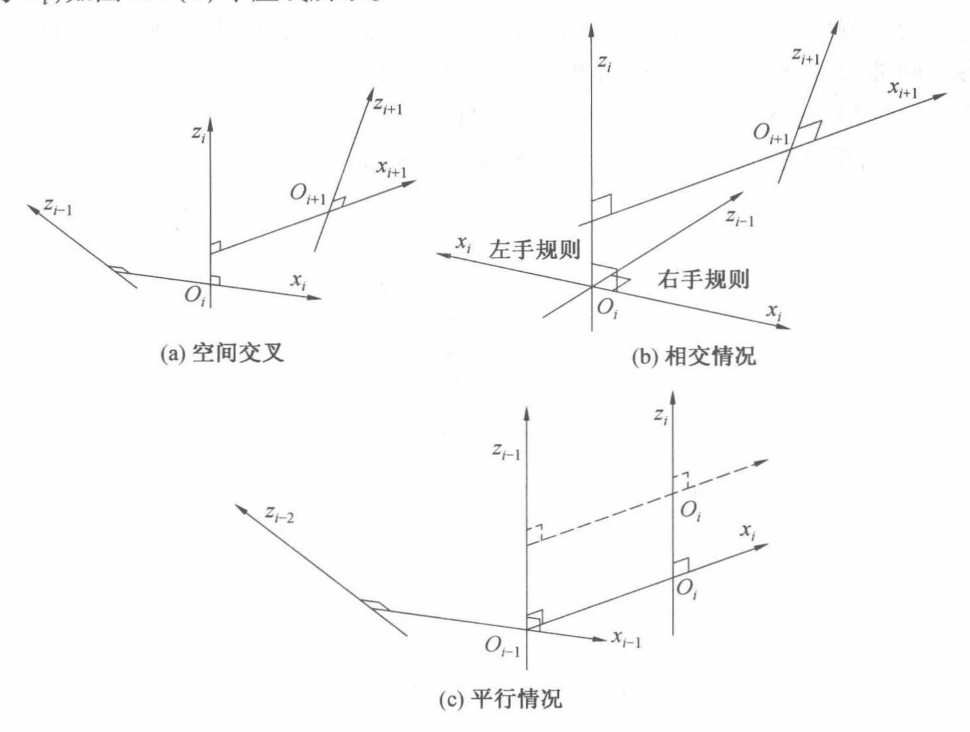


图 3.5　相邻关节轴线的空间位置

从建立坐标系的过程可以看出，F_i 坐标系的建立依赖于 F_{i-1} 坐标系的信息，坐标系 F_1 的 x 轴方向和原点的位置可根据分析简单的原则自由定义，第 $n+1$ 个坐标系固定在第 n 个杆件的后端，因为机器人没有 $n+1$ 个关节，z_{n+1} 位置和方向无法定义，故规则不适用于最后一个坐标系的定义，但也要根据分析问题方便的原则，自由定义出合适的坐标系。这样 $n+1$ 个杆定义了 $n+1$ 个坐标系 $F_1, F_2, \cdots, F_{n+1}$，它们依次固连于杆件 $0, 1, \cdots, n$ 上，一个 n 轴开环串联机器人机构包括 $n+1$ 个杆件和 $n+1$ 个坐标系。

3.2.3　D-H 参数表的建立

根据坐标建立的规则，在杆 $i-1$ 和杆 i 建立了坐标系，如图 3.6 所示，按照定义的 D-H 参数所表示的几何意义，从图中可以观察出以下参数的定义。

(1) 连杆长度。z_i 和 z_{i+1} 两轴之间的距离即为 a_i，沿着 x_{i+1} 正向，为非负值。

(2) 连杆扭角。z_i 和 z_{i+1} 两轴之间的夹角即为 α_i，其正负由 x_{i+1} 轴确定，遵循右手规则，从 z_i 转动到 z_{i+1}。

(3) 连杆偏距。x_{i+1} 轴与 z_i 轴的交点记为 O'_i，$O_iO'_i$ 的距离即为 d_i，此值的正负取决于 $\overrightarrow{O_iO'_i}$ 方向，如果此方向与 z_i 轴正向一致，则为正，反之为负。从图 3.6 中也可以看出，d_i 的绝对值由 x_i 和 x_{i+1} 两轴的距离确定。

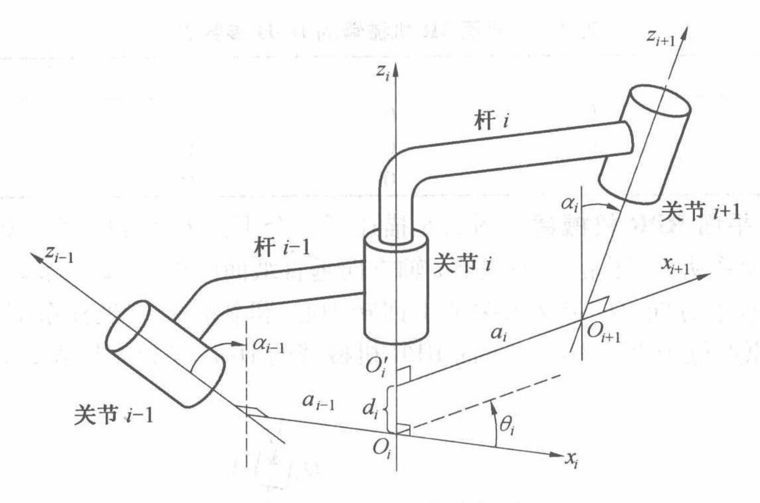


图3.6　D-H 参数示意图

(4)关节角。x_i 和 x_{i+1} 两轴之间的夹角即为 θ_i,其正负由 z_i 轴确定,遵循右手规则,从 x_i 转动到 x_{i+1}。

如果第 i 个关节是 R 型,则 θ_i 为第 i 个关节的关节变量(Joint Variable), a_i,α_i 和 d_i 为常量,称为连杆参数或为连杆常数。如果第 i 个关节为 P 型,则 d_i 为关节变量,其他量为连杆参数。因此,n 轴操纵手有 n 个关节变量,组成一个 n 维矢量 $\boldsymbol{\theta}$,无论是转动关节还是移动关节,都有 $3n$ 个连杆常数。连杆常数确定了操纵器的结构,而关节变量确定了操纵器的位形。

【例 3.1】　平面 3R 机械臂坐标系的建立及 D-H 参数表　图 3.7 描述了一个平面 3R 机械臂,按照建立坐标系的规则,所建坐标系从 F_1 开始,z_i 各轴方向垂直纸面向外,且相互平行,x_1 选择沿水平方向,O_1 定义于关节 1 回转中心,坐标系 F_2,F_3 的建立规则按照轴线平行的情况建立,其原点恰好位于各关节的回转中心,x_2,x_3 轴的方向如图 3.7 所示,机械臂末端坐标系 F_4 的 z 轴与第 3 关节 z 轴平行,原点位于手爪中心。坐标系建立完成后,D-H 参数可以按照上述方法观察得到,其格式及参数见表 3.1。

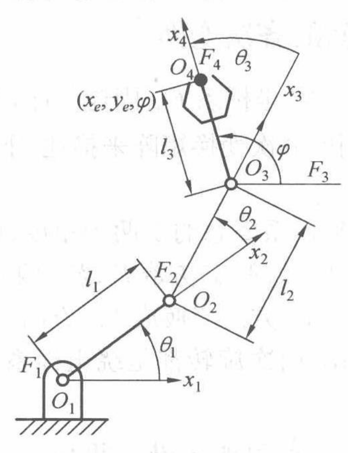


图3.7　平面 3R 机械臂简图

表 3.1 平面 3R 机械臂的 D-H 参数表

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	θ_1
2	l_2	0	0	θ_2
3	l_3	0	0	θ_3

【例 3.2】 平面 RPR 机械臂 图 3.8 描述了一个平面 RPR 机械臂，按照建立坐标系的规则，所建坐标系从 F_1 开始，R 型关节 z 轴方向垂直纸面向外，第 2 关节 z 轴方向如图3.8所示，x_1 选择沿水平方向，O_1 定义为关节 1 回转中心，机械臂末端坐标系 F_4 的 z 轴与第 3 关节 z 轴平行，原点位于手爪中心。平面 RPR 机械臂的 D-H 参数表见表 3.2。

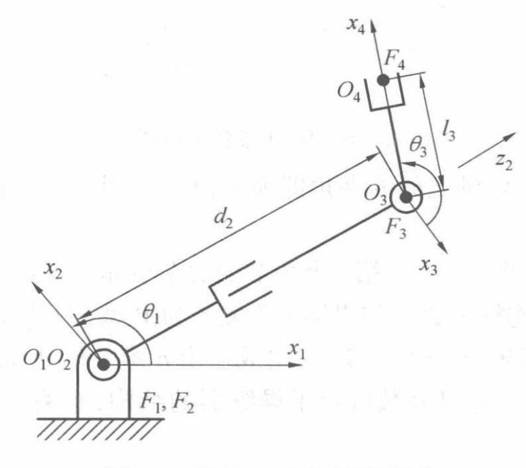


图 3.8 平面 RPR 机械臂简图

表 3.2 平面 RPR 机械臂的 D-H 参数表

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	90°	0	θ_1
2	0	90°	d_2	180°
3	l_3	0	0	θ_3

3.2.4 D-H 坐标系之间的齐次变换

坐标系 F_i 固连于杆 $i-1$ 的后端，坐标系 F_{i+1} 固连于杆 i 的后端，显然两杆之间的相对位置和姿态可以通过两个坐标之间的齐次变换矩阵来描述，下面详细讨论这两坐标系之间的姿态和位置的关系。

通过观察可知道，影响两个坐标系姿态的是两个角度，即 θ_i 角和 α_i 角，参考图 3.6，得出三个相邻坐标系关系如图 3.9 所示，假定初始 F_i，F_{i+1} 两坐标重合，可以通过有序的两次旋转得出两坐标系的方位关系，从 F_i 方向变换成 F_{i+1} 方向，如图 3.9 所示。首先，绕坐标系 z_i 轴旋转 θ_i 角，其后绕 x_{i+1} 旋转 α_i，两次旋转都是绕坐标系 F_{i+1} 进行的。因为扭角 α_i 为常量，为了书写方便，首先令

$$\lambda_i = \cos\alpha_i, \mu_i = \sin\alpha_i$$

这里特定令 $\boldsymbol{Q}_i$ 表示 D-H 方法中 F_{i+1} 相对于 F_i 的旋转矩阵，写为

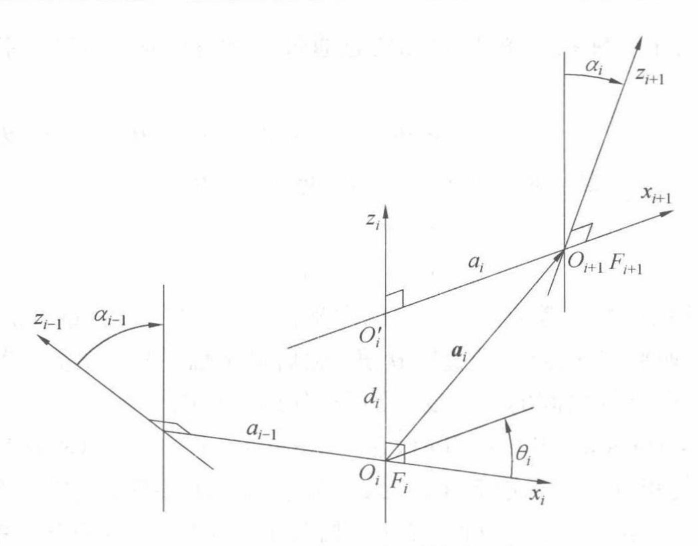


图 3.9　相邻三个坐标系的位姿关系

$$^{i}\boldsymbol{Q}_{i+1}=\boldsymbol{Q}_i=\mathrm{Rot}(\hat{z},\theta_i)\,\mathrm{Rot}(\hat{\boldsymbol{x}},\alpha_i)=\begin{bmatrix}\cos\theta_i & -\lambda_i\sin\theta_i & \mu_i\sin\theta_i\\ \sin\theta_i & \lambda_i\cos\theta_i & -\mu_i\cos\theta_i\\ 0 & \mu_i & \lambda_i\end{bmatrix}\tag{3.1}$$

如果令$^{i}\hat{\boldsymbol{x}}_{i+1}$，$^{i}\hat{\boldsymbol{y}}_{i+1}$和$^{i}\hat{\boldsymbol{z}}_{i+1}$表示坐标系 F_{i+1} 的各坐标轴在坐标系 F_i 的单位方向，从图 3.10 中也容易得出

$$^{i}\hat{\boldsymbol{x}}_{i+1}=\begin{bmatrix}\cos\theta_i\\ \sin\theta_i\\ 0\end{bmatrix},\ ^{i}\hat{\boldsymbol{z}}_{i+1}=\begin{bmatrix}\mu_i\sin\theta_i\\ -\mu_i\cos\theta_i\\ \lambda_i\end{bmatrix},\ ^{i}\hat{\boldsymbol{y}}_{i+1}={}^{i}\hat{\boldsymbol{z}}_{i+1}\times{}^{i}\hat{\boldsymbol{x}}_{i+1}=\begin{bmatrix}-\lambda_i\sin\theta_i\\ \lambda_i\cos\theta_i\\ \mu_i\end{bmatrix}\tag{3.2}$$

与 $\boldsymbol{Q}_i$ 矩阵中三个列矢量所表示的两个坐标系方向意义一致。

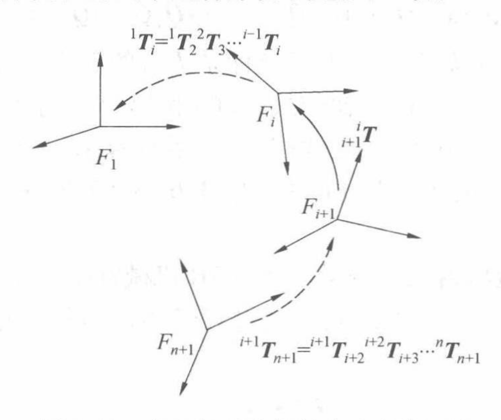


图 3.10　各坐标系之间的齐次变换矩阵

下面推导两个坐标系之间的位置关系。参考图 3.6，在坐标系 F_i 下，坐标系 F_{i+1} 原点的位置用矢量 $\boldsymbol{a}_i$ 表示，从图可以得

$$\boldsymbol{a}_i=\overrightarrow{O_iO_{i+1}}=\overrightarrow{O_iO'_i}+\overrightarrow{O'_iO_{i+1}}=d_i{}^{i}\hat{z}_i+a_i{}^{i}\hat{\boldsymbol{x}}_{i+1}=d_i\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+a_i\begin{bmatrix}\cos\theta_i\\ \sin\theta_i\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_i\cos\theta_i\\ a_i\sin\theta_i\\ d_i\end{bmatrix}\tag{3.3}$$

坐标系 F_{i+1} 相对于坐标系 F_i 的位置和姿态通过 $\boldsymbol{a}_i$ 和 $\boldsymbol{Q}_i$ 确定，可以用其次变换矩阵 $\boldsymbol{T}_i$ 表示为

$$^{i}\boldsymbol{T}_{i+1}=\boldsymbol{T}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_i & \boldsymbol{a}_i\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta_i & -\lambda_i\sin\theta_i & \mu_i\sin\theta_i & a_i\cos\theta_i\\ \sin\theta_i & \lambda_i\cos\theta_i & -\mu_i\cos\theta_i & a_i\sin\theta_i\\ 0 & \mu_i & \lambda_i & d_i\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\tag{3.4}$$

参考第 2 章的知识，并参考图 3.9 所示的两坐标系 F_{i+1} 与 F_i，自重合的位置开始，F_{i+1} 在自身坐标系下，沿 z 轴平移 d_i，绕 z 轴旋转 θ_i 角，然后沿 x 轴平移 a_i，最后绕 x 轴旋转 α_i 角，经过四次变换，得出两坐标之间的齐次变换矩阵，其过程可以写为

$$\boldsymbol{T}_i=\mathrm{Trans}(0\quad 0\quad d_i)\mathrm{Rot}(\hat{\boldsymbol{z}},\theta_i)\mathrm{Trans}(a_i\quad 0\quad 0)\mathrm{Rot}(\hat{\boldsymbol{x}},\alpha_i)\tag{3.5}$$

计算最终得到的矩阵 $\boldsymbol{T}_i$ 与式(3.4)一致。显然，D-H 参数表中第 i 行的参数代入式(3.4)所得到的齐次变换矩阵，唯一确定了 F_{i+1} 相对于 F_i 的位置与姿态关系。

3.3　机器人正运动学

一旦建立机械臂各杆坐标系，相应的 D-H 参数表得到后，就可以很方便地分析机器人的正运动学，机器人末端的第 n+1 个坐标系在坐标系{1}的齐次变换矩阵可以通过各齐次变换矩阵连乘得到，即

$$^{1}\boldsymbol{T}_{n+1}={}^{1}\boldsymbol{T}_2{}^{2}\boldsymbol{T}_3{}^{3}\boldsymbol{T}_4\cdots{}^{n}\boldsymbol{T}_{n+1}\tag{3.6}$$

各个坐标系之间的位置与姿态可以通过齐次变换矩阵相乘得到，如图 3.10 所示。

机器人末端的姿态和位置也可以写为

$$\begin{cases}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_n\\ \boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{a}_3+\cdots+\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_{n-1}\boldsymbol{a}_n\end{cases}\tag{3.7}$$

式中，$\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 分别表示在坐标系 F_1 下，末端坐标系 F_{n+1} 的姿态与位置；$\boldsymbol{a}_i$ 表示在坐标系 F_i 下坐标系 F_{i+1} 原点的位置矢量。注意，比较式(3.6)和(3.7)，前者易于理解，而后者计算方便，式(3.6)计算 4×4 矩阵的 16 个参数，式(3.7)仅需计算 12 个参数，9 个姿态矩阵参数，3 个位置矢量参数。在机器人正运动学分析中，式(3.6)和(3.7)右侧是关节变量的输入，左侧是结果的输出。

【例 3.3】　平面 3R 机械臂正运动学　平面 3R 机械臂机构如图 3.7 所示，D-H 参数表见表 3.1。齐次变换矩阵 $\boldsymbol{T}_i(i=1,2,3)$ 可以通过式(3.6)得到，则此机械臂的正运动学可以表示为

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_3$$

式中，$\boldsymbol{T}$ 表示末端坐标系相对于坐标系{1}的齐次变换矩阵，推导得

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1c_1+l_2c_{12}+l_3c_{123}\\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1s_1+l_2s_{12}+l_3s_{123}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\tag{3.8}$$

式中，$s_{123}=\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$，$c_{123}=\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$。

【例 3.4】 平面 RPR 机械臂正运动学 平面 RPR 机械臂机构如图 3.8 所示，D-H 参数表见表 3.2。各坐标系之间的齐次变换矩阵 $\boldsymbol{T}_i(i=1,2,3)$ 可以通过式(3.6)得到，则此机械臂的正运动学可以表示为

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_3$$

式中，$\boldsymbol{T}$ 表示末端坐标系相对于坐标系{1}的齐次变换矩阵，推导得

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} c_{13} & -s_{13} & 0 & d_2c_1+l_3c_{13} \\ s_{13} & c_{13} & 0 & d_2s_1+l_3s_{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

【例 3.5】 空间 6R 机械臂正运动学 图 3.11 ~ 3.13 所示为空间 6R 机械臂，包括七个杆件，编号为 0 ~ 6，七个坐标系，编号为 1 ~ 7，最后一个坐标系可以任意定义，一般而言，其 z 轴方向与最后一个关节所定义的 z 轴方向一致，其原点位于机械臂末端执行器设定的操作点(在任务空间描述机械臂末端运动的参考点)处，第 1 关节和第 2 关节轴线垂直，第 2 关节和第 3 关节轴线平行，最后三个关节轴相交于一点 C，组成机械臂的手腕，前三个关节运动改变 C 点的位置，而后三个关节运动时，点 C 保持不动。当点 C 保持不动时，手腕上所有点以 C 为球心运动，称为球形手腕，此机械臂结构为解耦型结构，在 D-H 参数中，$a_4=a_5=a_6=0$，F_5,F_6 坐标系原点重合。在图 3.11 ~ 3.13 中，构型 1、构型 2 和构型 3 存在细微的差别，图 3.11 大臂存在偏距，即杆 1 和杆 2 有连杆偏置 d_2，图 3.12 除存在大臂偏置外，小臂存在连杆长度 a_3，图 3.13 大臂无偏置，但杆 1 具有长度 a_1，所建立的坐标系原点的矢量线，即从 O_1 ~ O_6 的连线在同一个平面上，可以降低运动学计算的难度。根据所建立的坐标系，得到 D-H 参数表见表 3.3 ~ 3.5。

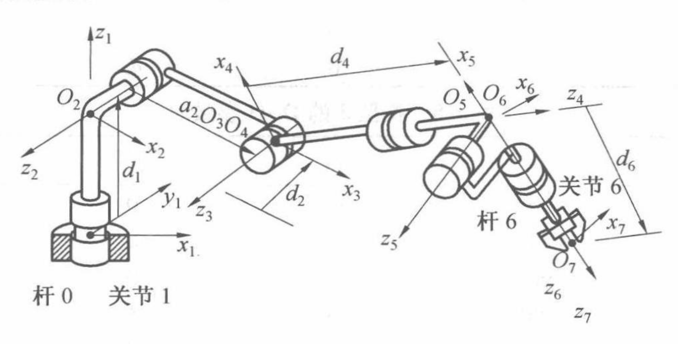


图 3.11 构型 1

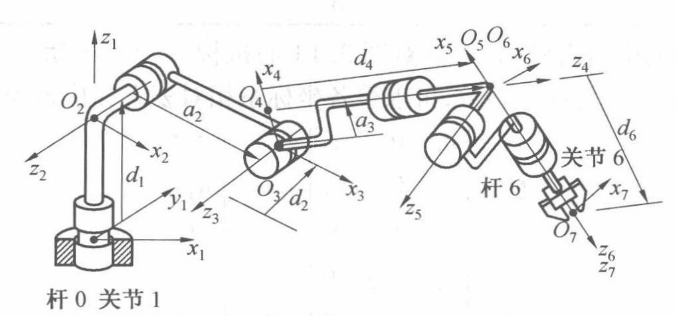


图 3.12 构型 2

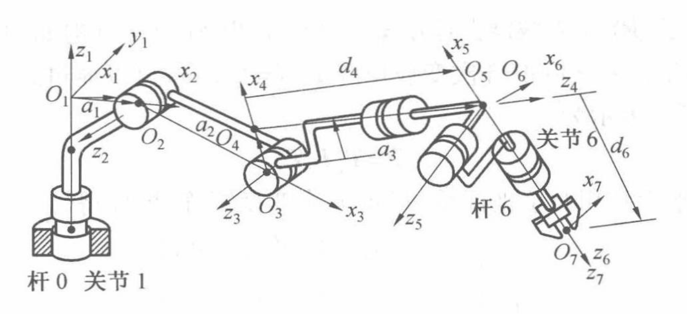


图 3.13 构型 3

表 3.3 构型 1 的 D-H 参数表

i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	90°	0	d_1	θ_1
2	0°	a_2	d_2	θ_2
3	90°	0	0	θ_3
4	−90°	0	d_4	θ_4
5	90°	0	0	θ_5
6	0°	0	d_6	θ_6

表 3.4 构型 2 的 D-H 参数表

i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	90°	0	d_1	θ_1
2	0	a_2	d_2	θ_2
3	90°	a_3	0	θ_3
4	−90°	0	d_4	θ_4
5	90°	0	0	θ_5
6	0	0	d_6	θ_6

表 3.5 构型 3 的 D-H 参数表

i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	90°	a_1	0	θ_1
2	0	a_2	0	θ_2
3	90°	a_3	0	θ_3
4	−90°	0	d_4	θ_4
5	90°	0	0	θ_5
6	0	0	d_6	θ_6

以上三种构型的机器人机构，重点对图 3.13 的机构进行正运动学分析，根据式（3.4）和 D-H 参数表（表 3.5）的连杆参数，可求得各坐标系相对姿态和位置为

$$\boldsymbol{Q}_1=\begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix} a_1c_1 \\ a_1s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_2=\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix} a_2c_2 \\ a_2s_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_3=\begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 \\ s_3 & 0 & -c_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, a_3=\begin{bmatrix} a_3c_3 \\ a_3s_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_4=\begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 \\ s_4 & 0 & c_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, a_4=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

$$Q_5=\begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 \\ s_5 & 0 & -c_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, a_5=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_6=\begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, a_6=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

式中，c_i 表示 $\cos\theta_i$；s_i 表示 $\sin\theta_i$。

各连杆齐次变换矩阵相乘，得到机械手在基坐标系下的齐次变换矩阵为

$$T=T_1(\theta_1)T_2(\theta_2)T_3(\theta_3)T_4(\theta_4)T_5(\theta_5)T_6(\theta_6) \tag{3.10}$$

即为关节变量 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_6$ 的函数，为了求解此方程，要把一些中间结果计算出来。

$${}^5T_7=T_5(\theta_5)T_6(\theta_6)=\begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & s_5 & d_6s_5 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & -c_5 & -d_6c_5 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

$${}^4T_7={}^4T_5{}^5T_7=\begin{bmatrix} c_4c_5c_6-s_4s_6 & -c_4c_5s_6-s_4c_6 & c_4s_5 & d_6c_4s_5 \\ s_4c_5c_6+c_4s_6 & -s_4c_5s_6+c_4c_6 & s_4s_5 & d_6s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & d_4+d_6c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

关节2和关节3互相平行，得

$${}^2T_4={}^2T_3{}^3T_4=\begin{bmatrix} c_{23} & 0 & s_{23} & a_2c_2+a_3c_{23} \\ s_{23} & 0 & -c_{23} & a_2s_2+a_3s_{23} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

$${}^1T_4={}^1T_2{}^2T_4=\begin{bmatrix} c_1c_{23} & s_1 & c_1s_{23} & c_1(a_1+a_2c_2+a_3c_{23}) \\ s_1c_{23} & -c_1 & s_1s_{23} & s_1(a_1+a_2c_2+a_3c_{23}) \\ s_{23} & 0 & -c_{23} & a_2s_2+a_3s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

机械臂手爪坐标系相对于基坐标系得齐次矩阵为

$$T={}^1T_4{}^4T_7$$

机器人机构构型众多，最终结果无必要展开，读者可以自行计算得到。手腕中心点的位置定义为 p_C，根据式(3.14)可以计算为

$$\boldsymbol{p}_C=\boldsymbol{p}_{O_4}+{}^1\boldsymbol{Q}_4\boldsymbol{a}_4=$$

$$\begin{bmatrix} c_1(a_1+a_2c_2+a_3c_{23}) \\ s_1(a_1+a_2c_2+a_3c_{23}) \\ a_2s_2+a_3s_{23} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1c_{23} & s_1 & c_1s_{23} \\ s_1c_{23} & -c_1 & s_1s_{23} \\ s_{23} & 0 & -c_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1(a_1+a_2c_2+a_3c_{23}+d_4s_{23}) \\ s_1(a_1+a_2c_2+a_3c_{23}+d_4s_{23}) \\ a_2s_2+a_3s_{23}-d_4c_{23} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

为了校核 $\boldsymbol{T}={}^1\boldsymbol{T}_4{}^4\boldsymbol{T}_7$ 是否正确，给定机械臂初始状态，各关节变量的值为

$$\theta_1=0°,\theta_2=90°,\theta_3=0°,\theta_4=0°,\theta_5=0°,\theta_6=0°$$

坐标系原点位置矢量线如图 3.14 所示，此时杆 2 与水平面垂直，杆 3,4,5,6 平行于水平面，计算 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & a_1+d_4+d_6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_2+a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

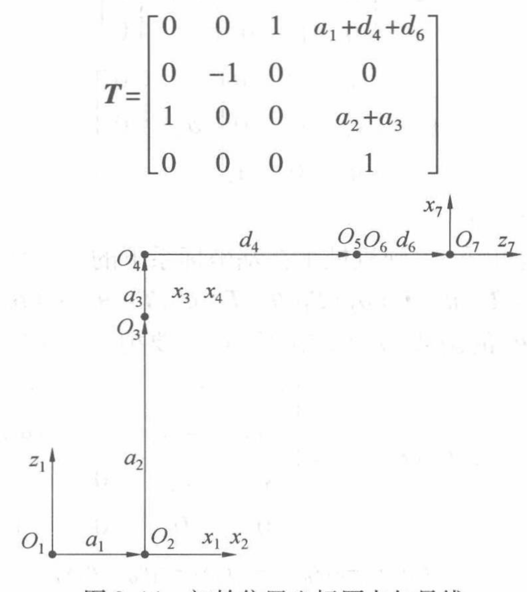


图 3.14 初始位置坐标原点矢量线

3.4 机器人逆运动学

3.3 节建立的机器人末端位姿(位置和姿态)与机器人各驱动关节变量的表达方式，称为机器人正运动学，机器人逆运动学是在给定末端位姿的前提下，求解相应各个关节变量。机器人逆运动学分析在机器人运动控制中是一个重要问题，因为机器人末端期望的轨迹是通过关节运动实现的。逆运动学复杂度较高的原因如下：

(1)解方程过程涉及方程非线性问题，有时无法推导出解析解。

(2)存在多解的情况。

(3)在某些特殊位形下存在无穷解，如机器人处于奇异位形或者冗余驱动时。

机器人逆运动学求解析解通常采用几何法和代数法，虽然在机器人在实时控制时希望机器人存在解析解，但不是所有的机器人逆运动学都存在解析解。存在解析解的机器人在所有构型中只占极少部分，一般而言，工业上应用的机器人大部分存在解析解。几何方法利用机器人机构特别的结构形式，采用几何观察的方法求各个关节变量，直观但不严谨。代数法利用式(3.6)中的代数变换求各个关节变量，有时需要两种方法结合起来求解。通常，末端的位置和姿态可通过以下两种形式给出：

$$T=\begin{bmatrix} Q & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x_e=\begin{bmatrix} p \\ \varphi \end{bmatrix}$$

式中，T 表示末端在机器人基坐标系下的齐次变换矩阵；末端的位置以矢量 p 给出；姿态以旋转矩阵 Q 给出；x_e 列矩阵中 φ 表示绕基坐标系或工具坐标系三个坐标轴的旋转角，如可采用 RPY 角描述末端的姿态。

3.4.1　平面 3R 机械臂逆解

图 3.15 为平面 3R 机械臂，给定末端手爪位置与姿态为 $x_e=[x_e \quad y_e \quad \varphi_e]^T$。$\varphi_e$ 为手爪绕 z 轴的转动角度，求解关节角 θ_1，θ_2 和 θ_3。

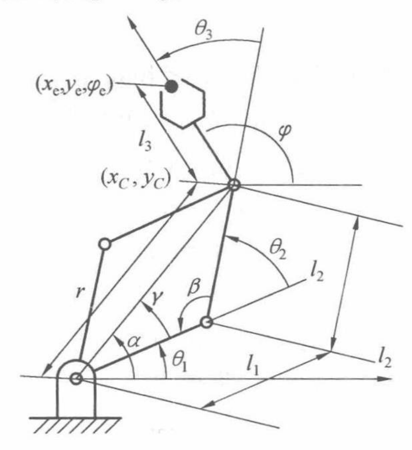


图 3.15　平面 3R 机械臂

1.3R 机械臂几何法

经过观察可以发现，当 θ_3 运动时，C 点的位置保持不动，因此 C 点的位置仅仅依赖于 θ_1，θ_2 的值，从图 3.15 中可以知道，C 点的位置为

$$\begin{cases} x_C=x_e-l_3\cos\varphi \\ y_C=y_e-l_3\sin\varphi \end{cases} \tag{3.16}$$

应用三角函数定理，得

$$r^2=l_1^2+l_2^2-2l_1l_2\cos\beta \tag{3.17}$$

式中，$r^2={x_C}^2+{y_C}^2$，则进一步得

$$\cos\beta=\frac{l_1^2+l_2^2-r^2}{2l_1l_2}\equiv D, \sin\beta=\pm\sqrt{1-D^2} \tag{3.18}$$

成立，有一个约束条件，即

$$r\leqslant l_1+l_2$$

当手腕中心点位置超出机械臂的可达工作空间，式(3.18)不成立。假定约束条件成立，则关节角 θ_2 可以表示为

$$\theta_2=\pi-\beta=\pi-\text{atan }2(\pm\sqrt{1-D^2}, D)$$

显然，当 $\theta_2\in(0,\pi]$ 时，3R 机械臂肘部下降(Elbow-down)，而当 $\theta_2\in[-\pi,0)$ 时，肘部抬起(Elbow-up)，当 $\theta_2=0$ 时，关节 2 处于过渡状态，此时机构位形奇异(Configuration Singular-

ity)。已知 C 点的坐标为(x_C,y_C),图 3.15 中 α 角可以表示为

$$\alpha=\operatorname{atan}2(y_C,x_C) \tag{3.19}$$

γ 角可以表示为

$$\gamma=\operatorname{atan}2(l_2\sin\theta_2,l_1+l_2\cos\theta_2) \tag{3.20}$$

θ_1 角可以表示为

$$\theta_1=\alpha-\gamma \tag{3.21}$$

显然

$$\theta_3=\varphi-\theta_1-\theta_2 \tag{3.22}$$

因为 θ_2 有两个解,当给定 3R 机械臂位姿时,其逆解有两组解。

2. 代数法

根据正运动学分析,3R 机械臂的末端坐标系相对于基坐标系的齐次矩阵如式(3.8)所示,矩阵中第四列前二行分别对应于末端的位置。手腕绕 z 轴转动,其旋转矩阵可以参考式(2.21),与式(3.8)所示的齐次矩阵比较,可以得出

$$\begin{aligned}\sin\varphi&=s_{123}\\ \cos\varphi&=c_{123}\\ x_e&=l_1c_1+l_2c_{12}+l_3c_{123}\\ y_e&=l_1s_1+l_2s_{12}+l_3s_{231}\end{aligned} \tag{3.23}$$

参考图 3.15,利用式(3.23),可以进一步得出

$$\begin{aligned}x_C&=l_1c_1+l_2c_{12}\\ y_C&=l_1s_1+l_2s_{12}\end{aligned} \tag{3.24}$$

式(3.24)两边平方,然后相加,得

$$x_C^2+y_C^2=l_1^2+l_2^2+2l_1l_2c_2 \tag{3.25}$$

解方程(3.25),得

$$c_2=\frac{x_C^2+y_C^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2},s_2=\pm\sqrt{1-c_2^2} \tag{3.26}$$

因此 θ_2 为

$$\theta_2=\operatorname{atan}2(s_2,c_2) \tag{3.27}$$

由 θ_2 已知,式(3.24)重新写为

$$\begin{aligned}x_C&=(l_1+l_2c_2)c_1-(l_2s_2)s_1\\ y_C&=(l_1+l_2c_2)s_1+(l_2s_2)c_1\end{aligned} \tag{3.28}$$

令

$$\begin{aligned}k_1&=l_1+l_2c_2\\ k_2&=l_2s_2\end{aligned}$$

采用三角代换法

$$\begin{aligned}k_1&=\rho\cos\gamma\\ k_2&=\rho\sin\gamma\end{aligned} \tag{3.29}$$

式中,$\rho=\sqrt{k_1^2+k_2^2}$,将式(3.29)代入式(3.28),得

$$x_C=\rho\cos\gamma c_1-\rho\sin\gamma c_1,x_C=\rho\cos(\gamma+\theta_1)$$

$$y_C=\rho\cos\gamma s_1+\rho\sin\gamma c_1, y_C=\rho\sin(\gamma+\theta_1)$$

则 θ_1 可以表示为

$$\theta_1=\mathrm{atan}\,2(y_C,x_C)-\mathrm{atan}\,2(k_2,k_1)$$

显然

$$\theta_3=\varphi-\theta_1-\theta_2$$

3.4.2　空间6R机械臂逆解

空间6R机械臂求其逆解非常困难,但机器人在腕中心点(Wrist Center) C 解耦,如图3.11所示,那么,逆解问题可以分解成位置逆解和姿态逆解两个相对简单的问题。如果机器人末端的位置和姿态在坐标系{1}下给定为

$$\begin{aligned}{}_7^1\boldsymbol{Q}(\theta_1,\cdots,\theta_6)&=\boldsymbol{Q}\\{}_7^1\boldsymbol{p}(\theta_1,\cdots,\theta_6)&=\boldsymbol{p}\end{aligned}\tag{3.30}$$

式(3.30)中,$\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 为已知的姿态和位置,逆解问题是求解 $\theta_1,\cdots,\theta_6$。参考图3.11,$\boldsymbol{Q}$ 第三列为 z_7 轴在坐标系{1}下的单位方向,可以知道

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_C+d_6\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\tag{3.31}$$

如果将给定的 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 表达为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}r_{11}&r_{12}&r_{13}\\r_{21}&r_{22}&r_{23}\\r_{31}&r_{32}&r_{33}\end{bmatrix},\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}x_e\\y_e\\z_e\end{bmatrix}\tag{3.32}$$

则腕中心点的位置矢量 $\boldsymbol{p}_C$ 为

$$\boldsymbol{p}_C=\begin{bmatrix}x_C\\y_C\\z_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_e-d_6r_{13}\\y_e-d_6r_{23}\\z_e-d_6r_{33}\end{bmatrix}\tag{3.33}$$

利用已知的 C 点的位置可求解 θ_1,θ_2 和 θ_3,称为位置逆解。

1. 位置逆解(几何法)

以不存在大臂偏置的机器人机构为例,图3.16为空间3R机械臂,为了降低逆解的计算难度,由机械臂坐标系 $F_1\sim F_5$ 原点所连成的矢量线位于同一平面,投影此矢量线到 xy 平面,此时 θ_1 可以表示为

$$\theta_1=\mathrm{atan}\,2(y_C,x_C)\tag{3.34}$$

存在第二个可能解为

$$\theta_1=\pi+\mathrm{atan}\,2(y_C,x_C)\tag{3.35}$$

当 $x_C=y_C=0$ 时,即 C 点位于 z_1 轴线上,θ_1 不确定,机构处于奇异位形。当存在大臂偏置时,参考图3.11,此时 $d_2\neq0$,则腕中心 C 点可以避免相交于 z_1 轴,以坐标系{1} x 轴正向为分界线,可分为左臂(Shoulder Right)和右臂(Shoulder Left)两种情况,在水平面投影后,对应的位形如图3.17和图3.18所示。

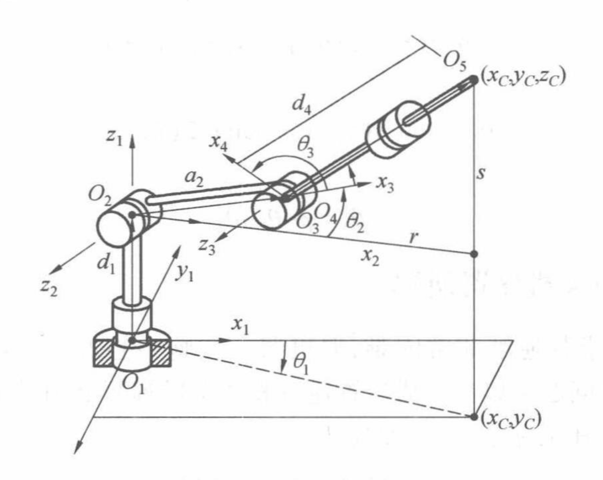


图 3.16 空间 3R 机械臂

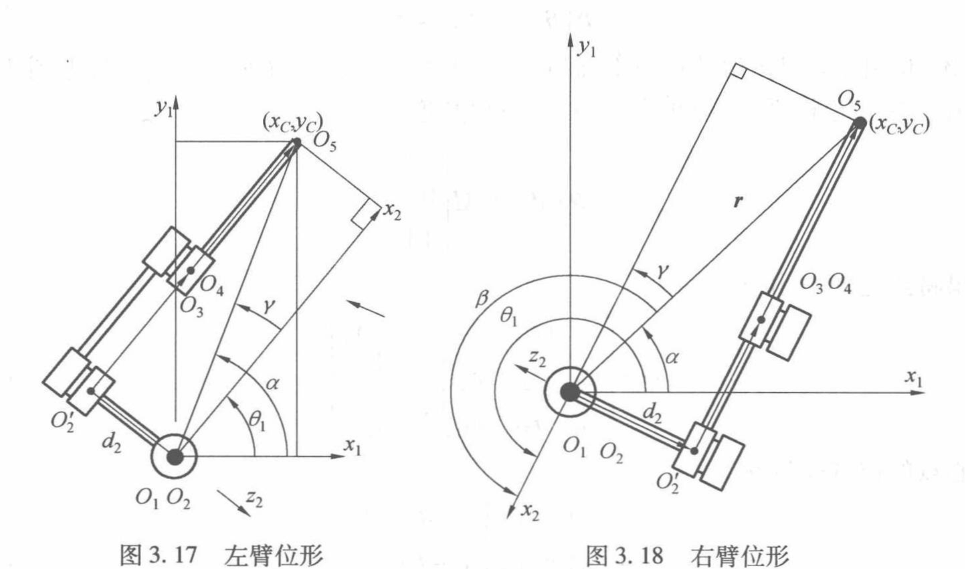


图 3.17 左臂位形 图 3.18 右臂位形

对于左臂的情况,从图 3.17 中几何的关系可以看出

$$\theta_1 = \alpha - \gamma \tag{3.36}$$

式中

$$\alpha = \text{atan } 2(y_C, x_C)$$

$$\gamma = \text{atan } 2(d_2, \sqrt{r^2 - d_2^2}) = \text{atan } 2(d_2, \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - d_2^2}) \tag{3.37}$$

式(3.36)进一步写为

$$\theta_1 = \text{atan } 2(y_C, x_C) - \text{atan } 2(d_2, \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - d_2^2}) \tag{3.38}$$

对于右臂的情况,从图 3.18 中的几何关系可以看出

$$\theta_1 = \alpha + \beta \tag{3.39}$$

式中

$$\alpha = \text{atan } 2(y_C, x_C)$$

$$\beta = \pi + \gamma \tag{3.40}$$

$$\gamma = \text{atan } 2(d_2, \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - d_2^2})$$

式(3. 40)可以进一步写为

$$\theta_1=\operatorname{atan}2(y_C,x_C)+\operatorname{atan}2(d_2,\sqrt{x_C^2+y_C^2-d_2^2})+\pi$$

θ_1 已经求出,下面求解 θ_2 和 θ_3。为了求解 θ_2 和 θ_3,沿图 3. 17 的投影方向,把杆 2 和杆 3 投影到 z_1 轴和 x_2 轴组成的平面上,如图 3. 19 所示,θ_2 和 θ_3 求解类似于平面 2R 机构。

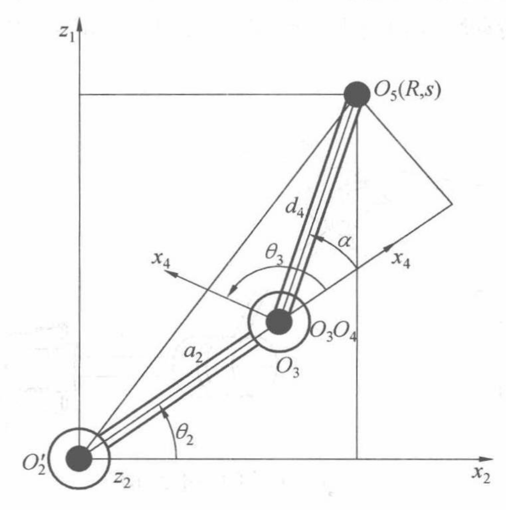


图 3. 19　杆 2 和杆 3 的投影

$$\theta_3=\frac{\pi}{2}+\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{R^2+s^2-a_2^2-d_4^2}{2a_2d_4}\equiv D \tag{3.41}$$

式中

$$R=\sqrt{x_C^2+y_C^2-d_2^2}$$
$$s=z_C-d_1$$

因此

$$\alpha=\operatorname{atan}2(\pm\sqrt{1-D^2},D)$$

α 的两个解分别对应于肘部落下(Elbow-down)和肘部抬起(Elbow-up)两个位置。θ_2 求解为

$$\theta_2=\operatorname{atan}2(s,R)-\operatorname{atan}2(d_4s\alpha,a_2+d_4c\alpha) \tag{3.42}$$

2. 姿态的逆解(代数几何结合法)

θ_1,θ_2 和 θ_3 已经求得,则已知旋转矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$,$\boldsymbol{Q}_2$ 和 $\boldsymbol{Q}_3$,坐标系 F_7 相对于坐标系 F_4 的旋转矩阵 ${}^4\boldsymbol{Q}_7$ 表示为

$${}^4\boldsymbol{Q}_7=\boldsymbol{Q}_4\boldsymbol{Q}_5\boldsymbol{Q}_6=\boldsymbol{M} \tag{3.43}$$

矩阵 $\boldsymbol{M}$ 可以通过以下计算得出:

$$\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{Q}_3)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_2)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=({}^1\boldsymbol{Q}_4)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} \tag{3.44}$$

经计算,假设矩阵 $\boldsymbol{M}$ 在坐标系 F_4 下表示为

$$M=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

首先定义关节 i 的轴线单位矢量为 $\boldsymbol{e}_i$，其正向与所定义的 z_i 轴方向一致。图 3.20 所示为手腕的一般结构，三条转动轴线相交于一点，由角 α_4 和 α_5 定义，设计值不能为 0°和 180°。

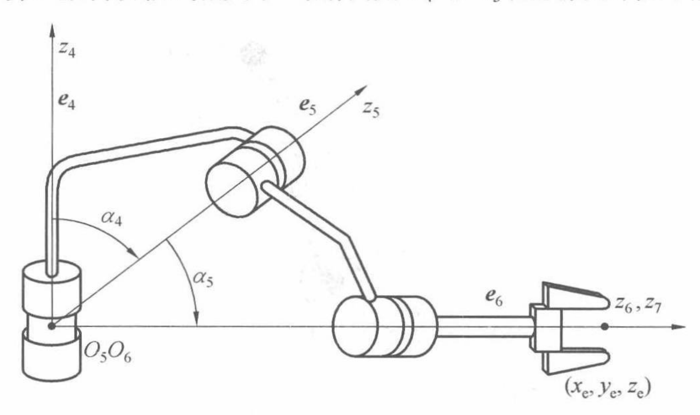


图 3.20 手腕的一般结构

从图 3.20 中可以看出，关节 6 的轴线方向 $\boldsymbol{e}_6$ 与坐标系 F_7 的 z 轴方向一致，在坐标系 F_4 下，$\boldsymbol{e}_6$，$\boldsymbol{e}_5$ 可以表示为

$$^4\boldsymbol{e}_6=\begin{bmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{bmatrix},\ ^4\boldsymbol{e}_5=\begin{bmatrix} \mu_4 s_4 \\ -\mu_4 c_4 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

则

$$^4\boldsymbol{e}_6\cdot{}^4\boldsymbol{e}_5=\lambda_5$$

$$m_{13}\mu_4 s_4-m_{23}\mu_4 c_4+m_{33}\lambda_4=\lambda_5 \tag{3.46}$$

令 $\begin{cases} A=m_{13}\mu_4 \\ B=m_{23}\mu_4 \\ C=\lambda_5-m_{33}\lambda_4 \end{cases}$，则

$$As_4-Bc_4=C \tag{3.47}$$

利用三角代换，有

$$A=\rho\cos\varphi,B=\rho\sin\varphi \tag{3.48}$$

式中，$\rho=\sqrt{A^2+B^2}$，$\varphi=\operatorname{atan}2(B,A)$。把式(3.47)代入式(3.46)，得到 θ_4 的解为

$$\left.\begin{aligned} &\sin(\theta_4-\varphi)=C/\rho,\cos(\theta_4-\varphi)=\pm\sqrt{1-(C/\rho)^2} \\ &\theta_4-\varphi=\operatorname{atan}2(C/\rho,\pm\sqrt{1-(C/\rho)^2}) \\ &\theta_4=\operatorname{atan}2(B,A)+\operatorname{atan}2(C/\rho,\pm\sqrt{1-(C/\rho)^2}) \end{aligned}\right\} \tag{3.49}$$

进一步求解 θ_5，式(3.43)可以改写为

$$\boldsymbol{Q}_5=(\boldsymbol{Q}_4)^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}(\boldsymbol{Q}_6)^{\mathrm{T}} \tag{3.50}$$

根据旋转矩阵 $\boldsymbol{Q}_i$ 的特点,其第三行不包含 θ_i,因此式(3.50)右侧乘积所得到的矩阵中第三列不包含 θ_6。令两侧矩阵的第三列前两项相等,得

$$\begin{cases}\mu_5 s_5=(m_{12}\mu_6+m_{13}\lambda_6)c_4+(m_{22}\mu_6+m_{23}\lambda_6)s_4\\-\mu_5 c_5=-\lambda_4(m_{12}\mu_6+m_{13}\lambda_6)s_4+\lambda_4(m_{22}\mu_6+m_{23}\lambda_6)c_4+\mu_4(m_{32}\mu_6+m_{33}\lambda_6)\end{cases}\tag{3.51}$$

由于已知 θ_4,通过式(3.51)可以计算得到 θ_5。最后,$\boldsymbol{Q}_6$ 可以表示为

$$\boldsymbol{Q}_6=\boldsymbol{Q}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_4^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}m_{11}&m_{12}&m_{13}\\m_{21}&m_{22}&m_{23}\\m_{31}&m_{32}&m_{33}\end{bmatrix}\tag{3.52}$$

通过式(3.52)可以计算得到 θ_6。对于每组(θ_4,θ_5)可得到对应的 θ_6 值,因此姿态的逆解有两组解。

3. 代数方法

参考图 3.13,用代数方法解此机器人结构的逆解,如果已知末端的位置和姿态,利用式(3.33)求得腕中心点的位置,再利用式(3.15)可以得到腕关节中心点位置和关节变量 θ_1,θ_2 和 θ_3 的表达式为

$$x_C=c_1(a_1+a_2c_2+a_3c_{23}+d_4s_{23})\tag{3.53}$$

$$y_C=s_1(a_1+a_2c_2+a_3c_{23}+d_4s_{23})\tag{3.54}$$

$$z_C=a_2s_2+a_3s_{23}-d_4c_{23}\tag{3.55}$$

具体求解步骤如下。

(1)求 θ_1。

从式(3.53)、(3.54)可以看出,如果 $a_1+a_2c_2+a_3c_{23}+d_4s_{23}\neq 0$,则

$$\theta_1=\operatorname{atan}2(y_C,x_C)\tag{3.56}$$

另一个解为

$$\theta_1=\pi+\operatorname{atan}2(y_C,x_C)\tag{3.57}$$

(2)求 θ_3。

式(3.53)两边乘 c_1,式(3.54)两边乘 s_1,相加得

$$x_Cc_1+y_Cs_1=a_1+a_2c_2+a_3c_{23}+d_4s_{23}\tag{3.58}$$

故

$$x_Cc_1+y_Cs_1-a_1=a_2c_2+a_3c_{23}+d_4s_{23}\tag{3.59}$$

令 $\kappa=x_Cc_1+y_Cs_1-a_1$,则式(3.55)和式(3.59)两侧平方后相加,得

$$a_3c_3+d_4s_3=\frac{1}{2a_2}(\kappa^2+z_C^2-a_2^2-a_3^2-d_4^2)$$

令 $\lambda=\frac{1}{2a_2}(k^2+z_C^2-a_2^2-a_3^2-d_4^2)$,利用三角代换方法,$\theta_3$ 的解为

$$\theta_3=\operatorname{atan}2(d_4,a_3)-\operatorname{atan}2(\pm\sqrt{a_3^2+d_4^2-\lambda^2},\lambda)\tag{3.60}$$

(3)求 θ_2。

为了求解 θ_2,式(3.55)和式(3.59)重新写为

$$a_2c_2=\kappa-a_3c_{23}-d_4s_{23}\tag{3.61}$$

$$a_2s_2=z_c-a_3s_{23}+d_4c_{23}\tag{3.62}$$

式(3.61)和(3.62)平方相加,经重新整理得

$$(\kappa d_4+z_C a_3)s_{23}+(\kappa a_3-z_C d_4)c_{23}=\frac{1}{2}(\kappa^2+z_C^2+a_3^2+d_4^2-a_2^2)$$

令$\begin{cases} m=\kappa d_4+z_C a_3 \\ n=\kappa a_3-z_C d_4 \\ l=\frac{1}{2}(\kappa^2+z_C^2+a_3^2+d_4^2-a_2^2) \end{cases}$,利用三角代换法,$\theta_{23}$可以求解为

$$\theta_{23}=\text{atan }2(l,\pm\sqrt{m^2+n^2-l^2})-\text{atan }2(n,m) \tag{3.63}$$

则

$$\theta_2=\theta_{23}-\theta_3 \tag{3.64}$$

根据式(3.12),${}^4\boldsymbol{Q}_7$ 表示为

$${}^4\boldsymbol{Q}_7=\begin{bmatrix} c_4c_5c_6-s_4s_6 & -c_4c_5s_6-s_4c_6 & c_4s_5 \\ s_4c_5c_6+c_4s_6 & -s_4c_5s_6+c_4c_6 & s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

矩阵 $\boldsymbol{M}$ 可以计算为

$$\boldsymbol{M}=({}^1\boldsymbol{Q}_4)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} c_1c_{23} & s_1c_{23} & s_{23} \\ s_1 & -c_1 & 0 \\ c_1s_{23} & s_1s_{23} & -c_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

比较式(3.65)和式(2.23)可以看出,如果令

$$\begin{cases} \theta_4=\alpha \\ \theta_5=\beta \\ \theta_6=\gamma \end{cases}$$

两者完全相同,求解 θ_4,θ_5 和 θ_6 的过程可参考 $z-y-z$ 角的求解过程,也可按照以下步骤求解。

(4)求解 θ_4。

$$c_4s_5=c_1c_{23}r_{13}+s_1c_{23}r_{23}+s_{23}r_{33}=m_{13}$$

$$s_4s_5=s_1r_{13}-c_1r_{23}=m_{23}$$

如果 $s_5>0$,则

$$\theta_4=\text{atan }2(m_{23},m_{13}) \tag{3.66}$$

如果 $s_5<0$,则

$$\theta_4=\text{atan }2(-m_{23},-m_{13}) \tag{3.67}$$

如果 $s_5=0$,θ_4 根据任务自己定义。

(5)求解 θ_5。

$${}^5\boldsymbol{Q}_7=(\boldsymbol{Q}_4)^{\mathrm{T}}({}^1\boldsymbol{Q}_4)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$$

参考式(3.11),则${}^5\boldsymbol{Q}_7$ 表示为

$${}^5\boldsymbol{Q}_7=\begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & s_5 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & -c_5 \\ s_6 & c_6 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

$$(\boldsymbol{Q}_4)^{\mathrm{T}}({}^1\boldsymbol{Q}_4)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{Q}_4)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} c_4 & s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -s_4 & c_4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

则

$$s_5=c_4m_{13}+s_4m_{23}-c_5=-m_{33}$$

$$\theta_5=\text{atan }2(c_4m_{13}+s_4m_{23},m_{33}) \tag{3.70}$$

(6)求解 θ_6。

$$s_6=-s_4m_{11}+c_4m_{21}$$

$$c_6=-s_4m_{12}+c_4m_{22}$$

$$\theta_6=\text{atan }2(-s_4m_{11}+c_4m_{21},-s_4m_{12}+c_4m_{22}) \tag{3.71}$$

经过以上步骤,解出 $\theta_1\sim\theta_6$。

本章小结

本章首先研究了 D-H 方法中各参数的几何意义。D-H 坐标系的建立以及各 D-H 参数的选取,深入分析了两相邻坐标系的位置与姿态的关系,进而利用 D-H 方法分析了常见空间 6R 机械臂的正运动学。采用几何法、代数法分析了平面 3R 和空间 6R 机械臂的逆运动学问题。

第 4 章　速度与雅可比矩阵

第 3 章对正逆运动学方程建立了关节变量与末端位置和姿态的关系，本章研究关节速度、末端线速度与角速度的关系，两者之间的关系可以用一个矩阵表示，称为雅可比矩阵，雅可比矩阵在分析机器人机构特性方面有着重要的作用，体现在以下几方面：①机构位形的奇异性分析；②驱动冗余分析；③可用于逆解的数值解方法中；④描述作用于关节力与作用于末端力之间的关系；⑤应用于机器人力控制。本章首先从刚体在空间运动的一般情况分析其速度与加速度的表达形式，然后建立工业机器人的雅可比矩阵。

4.1　刚体的运动速度与加速度

4.1.1　刚体上点的速度和加速度分析

刚体在空间运动可以看成与之固连的坐标系$\{B\}$的原点平移运动和刚体绕其原点的旋转运动，在惯性参考坐标系$\{A\}$下，刚体上所有点的位置、速度和加速度可以表示成关于时间的函数。如图 4.1 所示，在坐标系$\{B\}$下的点 S 在坐标系$\{A\}$下的位置矢量可以表示为

$$ {}^{A}\boldsymbol{p}_{S}={}^{A}\boldsymbol{p}_{BORG}+{}_{B}^{A}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{r}_{S} \tag{4.1}$$

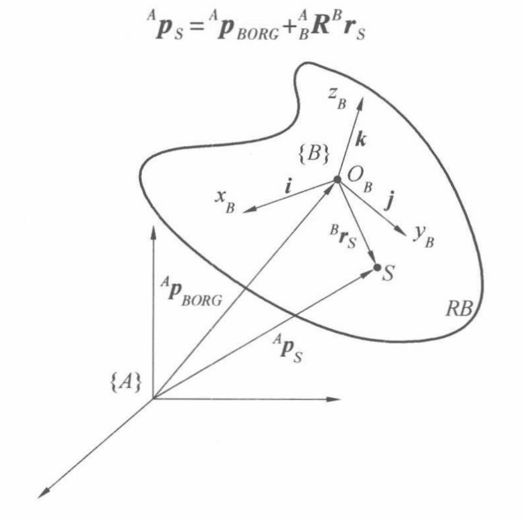


图 4.1　点 S 在刚体上静止

为了方便书写，在坐标系$\{A\}$下的矢量或旋转矩阵，其左上角不再标注，假设点 S 在坐标系$\{B\}$下位置不变，则点 S 的速度可由式(4.1)两边对时间微分得到，即

$$\boldsymbol{v}_{S}=\dot{\boldsymbol{p}}_{S}=\dot{\boldsymbol{p}}_{BORG}+\dot{\boldsymbol{R}}\,{}^{B}\boldsymbol{r}_{S}=\boldsymbol{v}_{BORG}+\dot{\boldsymbol{R}}\,{}^{B}\boldsymbol{r}_{S} \tag{4.2}$$

式中，$\boldsymbol{v}_S$，$\boldsymbol{v}_{BORG}$分别表示点 S 和坐标系$\{B\}$的原点在坐标系$\{A\}$下的线速度。这里要先解决旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 对时间求导的问题。假定，刚体坐标系$\{B\}$与$\{A\}$的原点重合，绕原点做旋转运动，其运动完全可由两坐标系之间的旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 表示。假设 $\boldsymbol{R}$ 是随时间变化的光滑函数，

矢量$^{B}\boldsymbol{r}_S$通过旋转矩阵光滑映射到坐标系{A}下为$\boldsymbol{r}_S$，即

$$\boldsymbol{r}_S=\boldsymbol{R}(t)\,^{B}\boldsymbol{r}_S \tag{4.3}$$

在任意时刻，存在关系式

$$\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)=\boldsymbol{I} \tag{4.4}$$

式中，$\boldsymbol{I}$表示3×3单位矩阵。式(4.4)两边对时间求导，得

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)+\boldsymbol{R}(t)\dot{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}}(t)=\boldsymbol{0} \tag{4.5}$$

令

$$\boldsymbol{\Omega}=\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t) \tag{4.6}$$

进一步可以得

$$\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0} \tag{4.7}$$

显然，式(4.7)成立，$\boldsymbol{\Omega}$必然是一个反对称矩阵。根据式(4.6)，$\dot{\boldsymbol{R}}(t)$为

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)=\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{R}(t) \tag{4.8}$$

式(4.3)两侧对时间微分，得

$$\dot{\boldsymbol{r}}_S=\dot{\boldsymbol{R}}(t)\,^{B}\boldsymbol{r}_S \tag{4.9}$$

式(4.8)代入式(4.9)，得

$$\dot{\boldsymbol{r}}_S=\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{R}(t)\,^{B}\boldsymbol{r}_S=\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{r}_S \tag{4.10}$$

如果刚体绕定点以$\boldsymbol{\omega}$角速度旋转运动，显然，刚体上S点的速度在参考坐标系{A}下可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_S=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_S \tag{4.11}$$

比较式(4.10)和(4.11)，得

$$\boldsymbol{\Omega}\equiv\boldsymbol{\omega}\times \tag{4.12}$$

依据附录A式(13)，可知

$$\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}$$

将式(4.8)代入式(4.2)，得到点S的速度$\boldsymbol{v}_S$为

$$\boldsymbol{v}_S=\boldsymbol{v}_{BORG}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_S \tag{4.13}$$

式(4.13)两侧对时间求导，可以得到S点的加速度$\boldsymbol{a}_S$为

$$\boldsymbol{a}_S=\boldsymbol{a}_{BORG}+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}_S+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_S) \tag{4.14}$$

式中，$\boldsymbol{a}_{BORG}$表示{B}坐标系原点的加速度(Origin Point Aacceleration)；$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}_S$表示转动加速度(Rotation Acceleration)；$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_S)$表示向心(离心)加速度(Centripetal Acceleration)。式(4.6)是一个重要的结论，揭示了描述刚体运动的欧拉角转动角速度和刚体实际的转动角速度的映射关系，刚体转动角速度$\boldsymbol{\omega}$的物理意义表示在瞬时刚体旋转姿态的改变，可以看成瞬时绕空间某轴线$\boldsymbol{e}$以角速度$\dot{\theta}$做旋转运动，表示为

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\dot{\theta}\begin{bmatrix}e_x\\ e_y\\ e_z\end{bmatrix}=\dot{\theta}\boldsymbol{e} \tag{4.15}$$

因此$[\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^{\mathrm{T}}$与欧拉角所表示的绕坐标轴三次有序转动的角速度不是一一对应

的关系。参考式(4.8),得到以下关系式

$$\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}=\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{4.16}$$

如果 $\boldsymbol{R}$ 表示为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{bmatrix}$$

则可以写出三个独立的方程,转动角速度各分量可以表示为

$$\begin{aligned}\omega_x&=\dot{r}_{31}r_{21}+\dot{r}_{32}r_{22}+\dot{r}_{33}r_{23}\\ \omega_y&=\dot{r}_{11}r_{31}+\dot{r}_{12}r_{32}+\dot{r}_{13}r_{33}\\ \omega_z&=\dot{r}_{21}r_{11}+\dot{r}_{22}r_{12}+\dot{r}_{23}r_{13}\end{aligned} \tag{4.17}$$

【例4.1】 考虑一个基本的旋转,刚体绕 x 轴转动 α 角,α 是时间的函数,则旋转矩阵表示为

$$\boldsymbol{R}(x,\alpha(t))=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\alpha(t) & -s\alpha(t)\\ 0 & s\alpha(t) & c\alpha(t)\end{bmatrix}$$

根据式(4.8),得

$$\boldsymbol{\Omega}=\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -s\alpha & -c\alpha\\ 0 & c\alpha & -s\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\alpha & s\alpha\\ 0 & -s\alpha & c\alpha\end{bmatrix}\dot{\alpha}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\dot{\alpha}\\ 0 & \dot{\alpha} & 0\end{bmatrix}$$

进一步得

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\alpha}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \tag{4.18}$$

参考式(4.15),式(4.18)的物理意义是刚体绕 x 轴以 $\dot{\alpha}$ 速度旋转。

【例4.2】 如果以RPY角描述在参考坐标系下的旋转运动,绕 x 轴、y 轴和 z 轴旋转的三个角度 ψ,θ 和 φ 是时间的函数,其描述刚体运动的角速度为

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}}_{RPY}=\begin{bmatrix}\dot{\psi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}$$

RPY角所表示的旋转矩阵参考式(2.28),利用式(4.17)可以得到刚体实际转动角速度和RPY角三个描述转动的角度随时间变化的表示形式为

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\theta c\varphi & -s\varphi & 0\\ c\theta s\varphi & c\varphi & 0\\ -s\theta & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\psi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix} \tag{4.19}$$

简写为

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{RPY}}\dot{\boldsymbol{\Theta}}_{\mathrm{RPY}} \tag{4.20}$$

式(4.19)重新写为

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\dot{\psi}\begin{bmatrix}c\theta c\varphi\\ c\theta s\varphi\\ -s\theta\end{bmatrix}+\dot{\theta}\begin{bmatrix}-s\varphi\\ c\varphi\\ 0\end{bmatrix}+\dot{\varphi}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\dot{\psi}\boldsymbol{e}_x+\dot{\theta}\boldsymbol{e}_y+\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z \tag{4.21}$$

显然,刚体转动角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 是瞬时分别绕 $\boldsymbol{e}_x$,$\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 轴以角速度 $\dot{\psi}$,$\dot{\theta}$ 和 $\dot{\varphi}$ 转动的合成,那么单位矢量 $\boldsymbol{e}_x$,$\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 如何得到呢? RPY 角描述刚体姿态是绕参考坐标系 x 轴、y 轴和 z 轴的三次有序转动,则 $\boldsymbol{e}_x$,$\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 可以表示为

$$\boldsymbol{e}_x=\mathrm{Rot}(\hat{\boldsymbol{z}},\varphi)\,\mathrm{Rot}(\hat{\boldsymbol{y}},\theta)\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_y=\mathrm{Rot}(\hat{\boldsymbol{z}},\varphi)\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_z=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{4.22}$$

从式(4.22)可以看出,后续的转动改变了当前转动轴线的方向,例如,描述刚体旋转运动时,首先绕 x 轴$[0\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}$ 转动角速度为 $\dot{\psi}$,因为后续描述刚体的旋转运动又绕 y 轴和 z 轴分别转动了 θ 角和 φ 角,最终 x 轴的方向由$[0\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}$ 变为 $\boldsymbol{e}_x$,最后绕 z 轴的转动轴方向未变化。

4.1.2　点相对于刚体移动速度与加速度分析

如图 4.2 所示,点 C 相对于刚体做平移运动,在瞬时,点 C 在两个坐标系下$\{A\}$和$\{B\}$的位置矢量关系为

$$\boldsymbol{p}_C=\boldsymbol{p}_{BORG}+\boldsymbol{R}^B\boldsymbol{r}_C \tag{4.23}$$

由式(4.23)两边对时间微分得到 C 点的速度 $\boldsymbol{v}_C$ 为

$$\boldsymbol{v}_C=\dot{\boldsymbol{p}}_C=\dot{\boldsymbol{p}}_{BORG}+\dot{\boldsymbol{R}}^B\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{R}^B\dot{\boldsymbol{r}}_C=\boldsymbol{v}_{BORG}+\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{R}^B\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{R}^B\dot{\boldsymbol{r}}_C \tag{4.24}$$

式中,令 $\boldsymbol{v}_{C\mathrm{rel}}=\boldsymbol{R}^B\dot{\boldsymbol{r}}_C$ 表示在坐标系$\{A\}$下 C 点相对于刚体的速度。在坐标系$\{A\}$下,式(4.24)可以写为更直观的形式为

$$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_{BORG}+\boldsymbol{v}_{C\mathrm{rel}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_C \tag{4.25}$$

式中,$\boldsymbol{\omega}$ 为刚体的转动角速度。C 点在坐标系$\{A\}$下的加速度,可通过对式(4.25)两边对时间求导,得

$$\dot{\boldsymbol{v}}_C=\dot{\boldsymbol{v}}_{BORG}+\dot{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{R}^B\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{\Omega}\dot{\boldsymbol{R}}^B\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{R}^B\dot{\boldsymbol{r}}_C+\dot{\boldsymbol{R}}^B\dot{\boldsymbol{r}}_C+\boldsymbol{R}^B\ddot{\boldsymbol{r}}_C \tag{4.26}$$

将式(4.8)代入式(4.26),得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{v}}_C=&\dot{\boldsymbol{v}}_{BORG}+\dot{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{R}^B\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{R}^B\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{R}^B\dot{\boldsymbol{r}}_C+\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{R}^B\dot{\boldsymbol{r}}_C+\boldsymbol{R}^B\ddot{\boldsymbol{r}}_C=\\ &\dot{\boldsymbol{v}}_{BORG}+(\dot{\boldsymbol{\Omega}}+\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{R}^B\boldsymbol{r}_C+2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{R}^B\dot{\boldsymbol{r}}_C+\boldsymbol{R}^B\ddot{\boldsymbol{r}}_C\end{aligned} \tag{4.27}$$

可以写成以下形式

$$\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{a}_{BORG}+\boldsymbol{a}_{C\mathrm{rel}}+2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_C+\alpha\times\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_C) \tag{4.28}$$

式中,$\boldsymbol{a}$ 表示刚体转动角加速度;$\boldsymbol{a}_{C\mathrm{rel}}=\boldsymbol{R}^B\ddot{\boldsymbol{r}}_C$ 表示相对加速度(Relative Acceleration);$2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_C=2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{R}^B\dot{\boldsymbol{r}}_C$ 表示科式加速度(Coriolis Acceleration),其他项物理意义与式(4.14)一致。

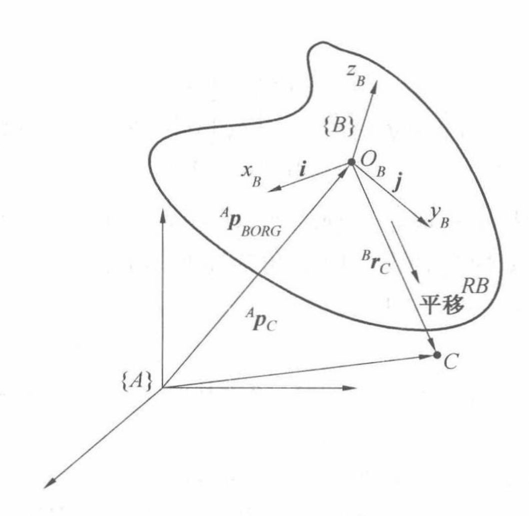


图 4.2 点 C 相对于刚体做平移运动

4.2 串联工业机械臂速度分析

本节将导出机械臂末端线速度、角速度和机器人关节速率之间的关系。考虑机械臂关节空间有 n 个关节,末端有 m 个自由度,其关节变量为 $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad \theta_n]^{\mathrm{T}}$,末端坐标系 $\{n+1\}$ 在基坐标系 $\{1\}$ 下的位置与姿态用齐次矩阵表示为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta}) & \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\theta})\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix} \tag{4.29}$$

当机器人运动时,$\boldsymbol{\theta}$,$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})$ 和 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\theta})$ 都是时间的函数,那么末端的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和线速度 $\boldsymbol{v}$ 与关节速率之间关系可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}&=\dot{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{v}&=\dot{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\theta})\end{aligned} \tag{4.30}$$

式(4.30)经过整理,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}&=\boldsymbol{J}_{\omega}\dot{\boldsymbol{\theta}}\\ \boldsymbol{v}&=\boldsymbol{J}_{v}\dot{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned} \tag{4.31}$$

可以统一写为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{4.32}$$

式中,$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{\omega}\\ \boldsymbol{J}_{v}\end{bmatrix}$,$[\boldsymbol{\omega} \quad \boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}$ 表示一个刚体的速度矢量,该速度包含了角速度矢量和线速度矢量,矩阵 $\boldsymbol{J}$ 称为雅可比矩阵(Jacobian Matrix),为瞬时关节速度映射为末端速度的传递矩阵。

4.2.1 微分方法

假设经过推导得出机器人的正运动学为

$$\boldsymbol{x}=f(\boldsymbol{\theta}),\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^{m},\boldsymbol{\theta}\in\mathbf{R}^{n} \tag{4.33}$$

则式(4.33)对时间求微分,得

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=\frac{\partial f_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_1}\dot{\theta}_1+\cdots+\frac{\partial f_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_n}\dot{\theta}_n\\&\vdots\\\dot{x}_m&=\frac{\partial f_m(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_1}\dot{\theta}_1+\cdots+\frac{\partial f_m(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_n}\dot{\theta}_n\end{aligned}\tag{4.34}$$

以上公式重新写成矩阵的形式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_1}&\cdots&\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_n}\\\vdots&&\vdots\\\dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_1}&\cdots&\dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_n}\end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\theta}}\tag{4.35}$$

末端速度与关节速度的关系可以简写为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{J}_a\dot{\boldsymbol{\theta}},\boldsymbol{J}\in\mathbf{R}^{m\times n}\tag{4.36}$$

式中,矩阵 $\boldsymbol{J}_a$ 称为分析雅可比矩阵(Analysis Jacobian Matrix)。如果式(4.33)中 $\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{p}\quad\boldsymbol{\phi}]^{\mathrm{T}}$表示末端的位置和姿态欧拉角,$\boldsymbol{p}$ 为从基坐标原点指向末端坐标系原点的矢量,$\boldsymbol{\phi}$ 表示末端坐标系相对于基坐标系的姿态欧拉角,例如 $\boldsymbol{\phi}=[\psi,\theta,\varphi]^{\mathrm{T}}$ 为 RPY 表示方式的三个欧拉角。则末端的速度$[\boldsymbol{\omega}\quad\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}$ 与 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 的关系为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{\omega}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{p}}\\\boldsymbol{J}_{\mathrm{RPY}}\dot{\boldsymbol{\phi}}\end{bmatrix}\tag{4.37}$$

根据式(4.37)也可得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}\\\dot{\boldsymbol{\phi}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{J}_{\mathrm{RPY}}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{\omega}\end{bmatrix}\tag{4.38}$$

【例 4.3】　平面 2R 机构雅可比矩阵　图 4.3 描述了平面 2R 机构,建立 D-H 坐标,连杆长度为 l_1 和 l_2,末端位置(x_e,y_e)与关节变量(θ_1,θ_2)的正运动学方程写为

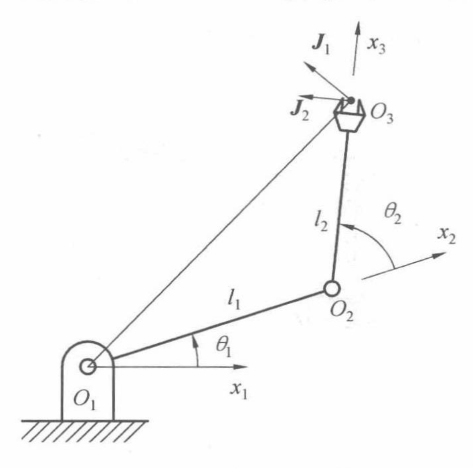


图 4.3　平面 2R 机构

$$\begin{cases}x_e=l_1c_1+l_2c_{12}\\y_e=l_1s_1+l_2s_{12}\end{cases}\tag{4.39}$$

式(4.39)对时间求微分,并写成矩阵的形式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-(l_1s_1+l_2s_{12}) & -l_2s_{12}\\ l_1c_1+l_2c_{12} & l_2c_{12}\end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{4.40}$$

式中,$\dot{\boldsymbol{x}}=[\dot{x}_e \quad \dot{y}_e]^{\mathrm{T}}$,$\dot{\boldsymbol{\theta}}=[\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^{\mathrm{T}}$,所得到的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}-(l_1s_1+l_2s_{12}) & -l_2s_{12}\\ l_1c_1+l_2c_{12} & l_2c_{12}\end{bmatrix} \tag{4.41}$$

如果把式(4.41)表示成列矢量的形式,有

$$\boldsymbol{J}=[\boldsymbol{J}_1 \quad \boldsymbol{J}_2]$$

也可写成

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{J}_1\dot{\theta}_1+\boldsymbol{J}_2\dot{\theta}_2 \tag{4.42}$$

图4.3表示出了$\boldsymbol{J}_1$和$\boldsymbol{J}_2$在平面的方向,$\boldsymbol{J}_2$表示雅可比矩阵的第二列,垂直于杆2,$\boldsymbol{J}_1$为雅可比矩阵的第一列,但不垂直于杆1,而是垂直于$\overrightarrow{O_1O_3}$。显然,关节2转动速度$\dot{\theta}_2$通过$\boldsymbol{J}_2$映射到末端,方向为$\boldsymbol{J}_2$规范化后的单位矢量,速度大小为$|\boldsymbol{J}_2|\dot{\theta}_2=l_2\dot{\theta}_2$,同理,关节1转动速度$\dot{\theta}_1$通过$\boldsymbol{J}_1$映射到末端,末端速度是两个关节映射速度的叠加。

【例4.4】 空间RRP球型机构雅可比矩阵 各几何参数如图4.4所示,末端的位置矢量为$\boldsymbol{p}=[p_x \quad p_y \quad p_z]^{\mathrm{T}}$,关节变量为$\boldsymbol{\theta}=[\theta_1 \quad \theta_2 \quad d_3]^{\mathrm{T}}$,推导其正运动学方程为

$$p_x=d_3c_2c_1$$

$$p_y=d_3c_2s_1$$

$$p_z=d_1+d_3s_2$$

两边对时间求导,得

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-d_3c_2s_1 & -d_3s_2c_1 & c_2c_1\\ d_3c_2c_1 & -d_3s_2s_1 & c_2s_1\\ 0 & d_3c_2 & s_2\end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\theta}}$$

式中,$\boldsymbol{v}$为末端的线速度;$\dot{\boldsymbol{\theta}}$为关节速率,$\dot{\boldsymbol{\theta}}=[\dot{\theta}_1\ \dot{\theta}_2\ \dot{d}_3]^{\mathrm{T}}$。

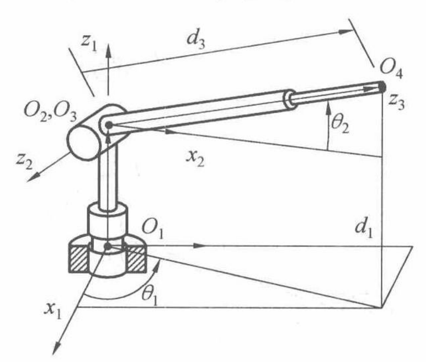


图4.4 空间RRP机构

4.2.2 几何方法

如图4.5所示,关节i和关节j分别为R型和P型关节,关节i的转动角速率为$\dot{\theta}_i$,则在

空间的转动速度为 $\dot{\theta}_i\boldsymbol{e}_i$（其中 $\boldsymbol{e}_i$ 为转动关节轴线单位方向），关节 j 的移动速率为 $\dot{d}_j$，则其空间的平移速度为 $\dot{d}_j\boldsymbol{e}_j$，$\boldsymbol{e}_j$ 为移动关节轴线单位方向。当关节 i 或关节 j 单独运动时，其余关节锁定，其关节速度对机械臂末端线速度和角速度的映射见表 4.1，表中 $\boldsymbol{r}_i$ 表示从关节轴线指向末端操作点的矢量。

表 4.1　关节速度对末端速度的影响

末端	转动关节	移动关节
线速度	$\dot{\theta}_i\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{r}_i$	$\dot{d}_j\boldsymbol{e}_j$
角速度	$\dot{\theta}_i\boldsymbol{e}_i$	无

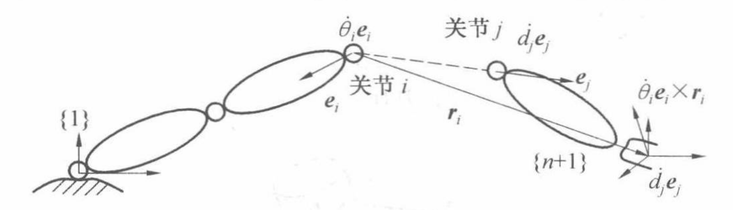


图 4.5　关节速度到末端速度的映射

显然，串联机器人末端的速度是各运动关节速度通过表 4.1 所示的方式映射到末端并叠加得到的。在机器人基坐标系{1}下，首先分析机械臂前、后两个连杆的角速度和线速度的递推关系。关节 i 为转动关节，所建立的坐标系、关节的轴线方向如图 4.6(a)所示，假设杆 $i-1$ 的角速度为 $\boldsymbol{\omega}_{i-1}$，则杆 i 的角速度可以表示为

$$\boldsymbol{\omega}_i=\boldsymbol{\omega}_{i-1}+\dot{\theta}_i\boldsymbol{e}_i,\ i=1,2,\cdots,n \tag{4.43a}$$

旋转运动杆件上每一点的角速度相同，通常情况下，每一点的线速度不同，为了描述杆的线速度，需要选择一个点，以此点的线速度作为杆件线速度的表示，在本书中，此点位于与杆件固连坐标系的原点处，如对于第 i 杆件，坐标系 F_{i+1} 固连于此杆件，其原点 O_{i+1} 为运动描述点，用此点速度表示杆的线速度。下面分析杆件 i 运动描述点 O_{i+1} 处的线速度，O_i 为杆 $i-1$ 与杆 i 的重合点，在其位置建立一个瞬时坐标系 F'_i，此坐标系方向与 F_i 坐标系一致，固连于杆 i 上，如图 4.6(b)所示，显然，此坐标系原点处的速度也为 $\boldsymbol{v}_{i-1}$，$\boldsymbol{v}_{i-1}$ 表示 $i-1$ 杆在 O_i 点处的线速度，参考图 4.6(b)和式(4.13)，可知

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_{i-1}+\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{a}_i,\ i=1,2,\cdots,n \tag{4.43b}$$

如果第 i 关节为移动关节，所连接的杆件 $i-1$ 和杆件 i 之间的关系如图 4.7 所示，因为移动关节不允许任何的相对转动，杆 i 和 $i-1$ 有相同的角速度，连接 F_i 和 F_{i+1} 坐标系原点的初始矢量 $\boldsymbol{a}_{i0}$ 为常量，沿着关节轴线方向移动位移为 d_i。并参考图 4.7 和式(4.25)，可以得出两杆之间角速度和线速度之间的递推关系式为

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\omega}_i=\boldsymbol{\omega}_{i-1}\\ \boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_{i-1}+\dot{d}_i\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{\omega}_{i-1}\times(\boldsymbol{a}_{i0}+d_i\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{v}_{i-1}+\dot{d}_i\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{\omega}_{i-1}\times\boldsymbol{a}_i\end{gathered} \tag{4.44}$$

式中，$\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{a}_{i0}+d_i\boldsymbol{e}_i$ 为关节 i 从初始位置运动后 O_i 点到 O_{i+1} 点的位置矢量。

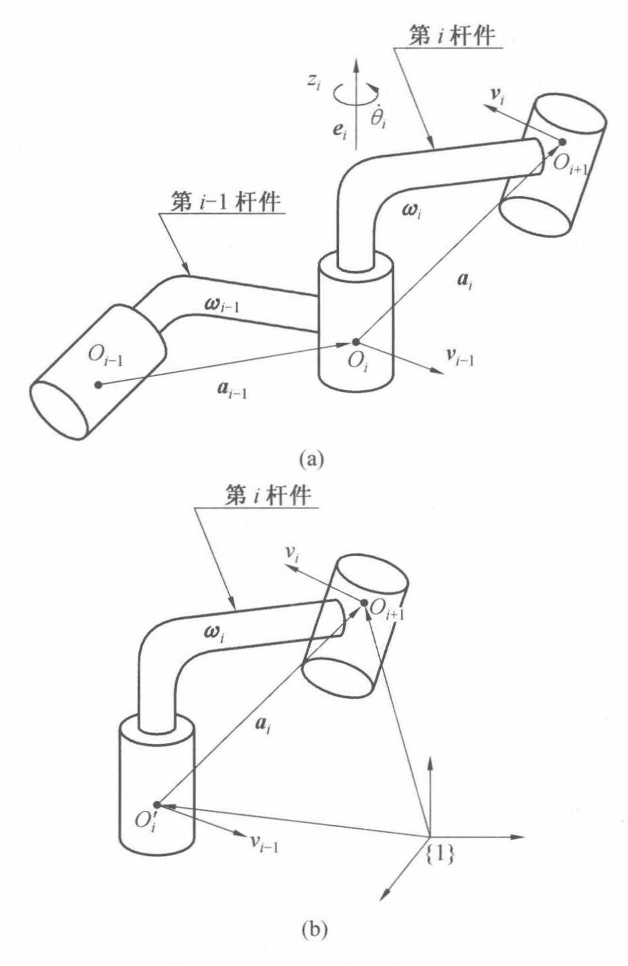


图 4.6 R 型关节速度递推

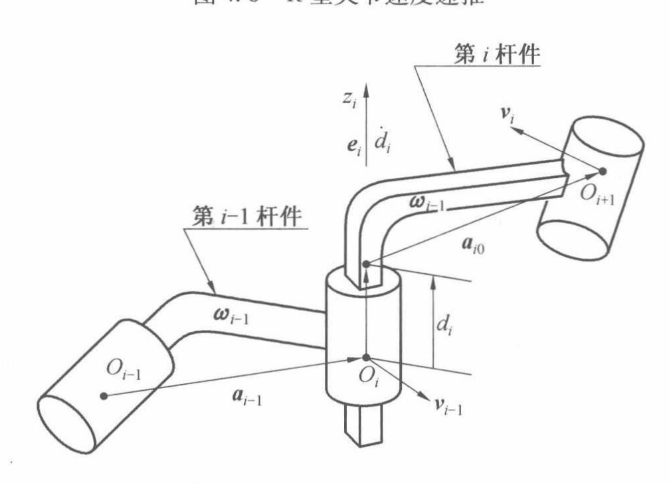


图 4.7 P 型关节速度递推

【例 4.5】 已知空间 2R 机构,某时刻关节位置为 θ_1,θ_2,速度大小为 $\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2$,空间各几何参数如图 4.8 所示,$O_1,O_2,O_3$ 为所建立坐标系的原点,其中 O_1 为基坐标系原点,假设瞬时关节轴线方向为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$,坐标原点之间的位置矢量为 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$,试推导此时末端的速度。杆 1 的角速度与线速度表示为

$$\boldsymbol{\omega}_1=\boldsymbol{\omega}_0+\dot{\theta}_1\boldsymbol{e}_1$$
$$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{a}_1 \tag{4.45}$$

式中,$\boldsymbol{\omega}_0=\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{0}$ 为第 0 杆,即基座的速度,$\boldsymbol{a}_1$ 为与杆 1 固连坐标系 F_2 原点相对于 F_1 的位置矢量。杆件 2 的角速度与线速度为

$$\boldsymbol{\omega}_2=\boldsymbol{\omega}_1+\dot{\theta}_2\boldsymbol{e}_2$$
$$\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{a}_2 \tag{4.46}$$

如果以 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 表示末端角速度和线速度,将式(4.45)代入式(4.46),得

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_2=\dot{\theta}_1\boldsymbol{e}_1+\dot{\theta}_2\boldsymbol{e}_2$$
$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{a}_2 \tag{4.47}$$

对式(4.47)进一步整理,得

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\theta}_1\boldsymbol{e}_1+\dot{\theta}_2\boldsymbol{e}_2$$
$$\boldsymbol{v}=\dot{\theta}_1\boldsymbol{e}_1\times(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+\dot{\theta}_2\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{a}_2$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_1\times(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2) & \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{a}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix}$$

因此,在基坐标系{1}下得到了末端速度和关节速度的关系。矩阵 $\boldsymbol{J}$ 是在基坐标系下得出的雅可比矩阵,矩阵 $\boldsymbol{J}$ 各项所包含的各关节轴单位方向 $\boldsymbol{e}_i$ 和各坐标系原点的相对位置矢量 $\boldsymbol{a}_i$ 依赖于所在的坐标系。

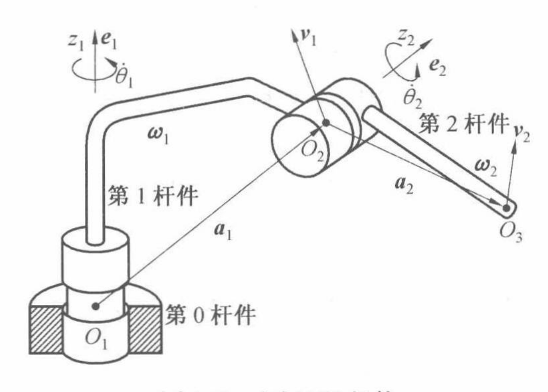


图 4.8　空间 RR 机构

【例 4.6】　如图 4.9 所示,已知空间 RP 机构,某时刻关节位置为 θ_1 和 d_2,速度大小为 $\dot{\theta}_1$ 和 $\dot{d}_2$,推导此时末端的速度。杆件 1 角速度与线速度为

$$\boldsymbol{\omega}_1=\boldsymbol{\omega}_0+\dot{\theta}_1\boldsymbol{e}_1$$
$$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{a}_1 \tag{4.48}$$

式中,$\boldsymbol{\omega}_0=\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{0}$;$\boldsymbol{a}_1$ 为与杆 1 固连坐标系 F_2 原点相对于坐标系 F_1 的位置矢量。杆件 2 的角速度与线速度为

$$\boldsymbol{\omega}_2=\boldsymbol{\omega}_1$$
$$\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1+\dot{d}_2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{a}_2 \tag{4.49}$$

如果以 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 表示末端角速度和线速度,将式(4.48)代入式(4.49),得

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\theta}_1\boldsymbol{e}_1$$

$$v=\dot{\theta}_1 e_1\times(a_1+a_2)+\dot{d}_2 e_2$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\omega\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1 & 0\\e_1\times(a_1+a_2) & e_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\\dot{d}_2\end{bmatrix}=J\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\\dot{d}_2\end{bmatrix}$$

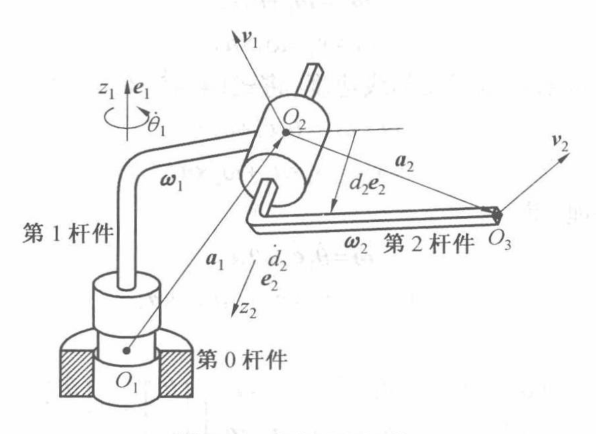


图 4.9 空间 RP 机构

假定 n 关节，$n+1$ 个杆件的机械臂如图 4.10 所示，各关节位置以 θ_i 表示，速度大小以 $\dot{\theta}_i$ 表示，关节轴线单位方向以 e_i 表示，坐标系 F_i 固连于第 $i-1$ 杆件没有画出，仅以原点 O_i 表示，从图中可以知道各杆件的角速度有以下关系：

$$\begin{aligned}\omega_1&=\dot{\theta}_1 e_1\\\omega_2&=\dot{\theta}_1 e_1+\dot{\theta}_2 e_2\\&\vdots\\\omega_n&=\dot{\theta}_1 e_1+\dot{\theta}_2 e_2+\cdots+\dot{\theta}_n e_n\end{aligned}\tag{4.50}$$

如果末端的角速度以 ω 表示，则

$$\omega=\dot{\theta}_1 e_1+\dot{\theta}_2 e_2+\cdots+\dot{\theta}_n e_n=\sum_1^n \dot{\theta}_i e_i\tag{4.51}$$

在基坐标系{1}下，末端位置矢量 p 可以表示为

$$p=a_1+a_2+\cdots+a_n\tag{4.52}$$

式(4.52)两侧对时间求导，得

$$\dot{p}=\dot{a}_1+\dot{a}_2+\cdots+\dot{a}_n\tag{4.53}$$

式中，参考式(4.11)，$\dot{a}_i=\omega_i\times a_i$，进一步，将式(4.50)代入式(4.53)，得

$$\dot{p}=\dot{\theta}_1 e_1\times a_1+(\dot{\theta}_1 e_1+\dot{\theta}_2 e_2)\times a_2+\cdots+(\dot{\theta}_1 e_1+\dot{\theta}_2 e_2+\cdots+\dot{\theta}_n e_n)\times a_n\tag{4.54}$$

重新整理为

$$\dot{p}=\dot{\theta}_1 e_1\times(a_1+a_2+\cdots+a_n)+\dot{\theta}_2 e_2\times(a_2+a_3+\cdots+a_n)+\cdots+\dot{\theta}_n e_n\times a_n\tag{4.55}$$

令 r_i 定义为

$$r_i=a_i+a_{i+1}+\cdots+a_n\tag{4.56}$$

表示在基坐标系下，从 O_i 指向末端操作点。如果令末端线速度为 $v=\dot{p}$，式(4.55)重新写为

$$v=\sum_1^n \dot{\theta}_i e_i\times r_i\tag{4.57}$$

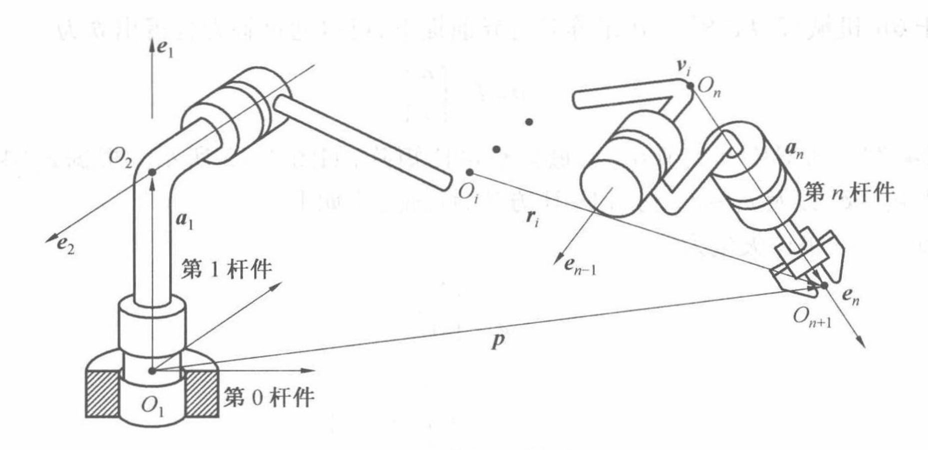


图 4.10　n 关节串联机械臂

式(4.51)和式(4.57)写成矩阵的形式可以表示为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n\\ \boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{r}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{r}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \vdots\\ \dot{\theta}_n\end{bmatrix} \tag{4.58}$$

得出末端速度$[\boldsymbol{\omega}\quad \boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}$与关节速率矢量$\dot{\boldsymbol{\theta}}$关系,简写为

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\theta}},\boldsymbol{J}\in\mathbf{R}^{6\times n} \tag{4.59}$$

式中,$\boldsymbol{t}=[\boldsymbol{\omega}\quad \boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}$,$\dot{\boldsymbol{\theta}}=[\dot{\theta}_1\quad \dot{\theta}_2\quad \cdots\quad \dot{\theta}_n]^{\mathrm{T}}$。这里,$\boldsymbol{J}$是机器人机构的雅可比矩阵,可以写为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{\omega}\\ \boldsymbol{J}_{v}\end{bmatrix} \tag{4.60}$$

式中

$$\boldsymbol{J}_{\omega}=[\boldsymbol{e}_1\quad \boldsymbol{e}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{e}_n]$$

$$\boldsymbol{J}_{v}=[\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{r}_1\quad \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{r}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{r}_n]$$

令$\boldsymbol{J}_i$表示雅可比矩阵$\boldsymbol{J}$的第i列,则

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_i\\ \boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{r}_i\end{bmatrix}$$

如果i关节是移动关节,参考式(4.44),此时

$$\dot{\boldsymbol{a}}_i=\dot{d}_i\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{\omega}_{i-1}\times\boldsymbol{a}_i$$

在这种情况下

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\theta}_1\boldsymbol{e}_1+\dot{\theta}_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\dot{\theta}_{i-1}\boldsymbol{e}_{i-1}+\dot{\theta}_{i+1}\boldsymbol{e}_{i+1}+\cdots+\dot{\theta}_n\boldsymbol{e}_n$$

$$\boldsymbol{v}=\dot{\theta}_1\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{r}_1+\dot{\theta}_2\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{r}_2+\cdots+\dot{\theta}_{i-1}\boldsymbol{e}_{i-1}\times\boldsymbol{r}_{i-1}+\dot{d}_i\boldsymbol{e}_i+\cdots\dot{\theta}_n\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{a}_n$$

关节矢量$\dot{\boldsymbol{\theta}}$定义为

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}=[\dot{\theta}_1\quad \dot{\theta}_2\quad \cdots\quad \dot{\theta}_{i-1}\quad \dot{d}_i\quad \cdots\quad \dot{\theta}_n]^{\mathrm{T}}$$

矩阵$\boldsymbol{J}$第i列变为

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{e}_i\end{bmatrix}$$

对于6R机械臂,$\boldsymbol{J}\in\mathbf{R}^{6\times6}$,在矩阵非奇异前提下,可以通过解方程得出$\dot{\theta}$为

$$\dot{\theta}=\boldsymbol{J}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix} \tag{4.61}$$

【例4.7】 推导空间关节6R机械臂雅可比矩阵,如图3.13所示。根据式(4.58),首先求导出$\boldsymbol{e}_1\sim\boldsymbol{e}_6$以及$\boldsymbol{r}_1\sim\boldsymbol{r}_6$,利用D-H方法,详细过程如下:

关节各轴的单位矢量为

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{Q}_1\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_1\\-c_1\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_4=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}={}^1\boldsymbol{Q}_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1s_{23}\\s_1s_{23}\\-c_{23}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_5=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{Q}_4\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}={}^1\boldsymbol{Q}_4\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c_1c_{23}s_4+s_1c_4\\-s_1c_{23}s_4-c_1c_4\\-s_{23}s_4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_6=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{Q}_4\boldsymbol{Q}_5\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}={}^1\boldsymbol{Q}_5\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(c_1c_{23}c_4+s_1s_4)s_5+c_1s_{23}c_5\\(s_1c_{23}c_4-c_1s_4)s_5+s_1s_{23}c_5\\s_{23}c_4s_5-c_{23}c_5\end{bmatrix}$$

推导位置矢量$\boldsymbol{r}_i$,首先根据图3.13,在$\boldsymbol{e}_6$已经得到的前提下,手腕中心点指向末端的矢量为

$$\overrightarrow{O_CO_7}=\boldsymbol{p}_7-\boldsymbol{p}_C=d_6\boldsymbol{e}_6$$

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{p}_7-\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{p}_C-\boldsymbol{p}_1+\overrightarrow{O_CO_7}=\begin{bmatrix}c_1(a_1+a_2c_2+a_3c_{23}+d_4s_{23})\\s_1(a_1+a_2c_2+a_3c_{23}+d_4s_{23})\\a_2s_2+a_3s_{23}-d_4c_{23}\end{bmatrix}+d_6\boldsymbol{e}_6$$

$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{p}_7-\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}c_1(a_2c_2+a_3c_{23}+d_4s_{23})\\s_1(a_2c_2+a_3c_{23}+d_4s_{23})\\a_2s_2+a_3s_{23}-d_4c_{23}\end{bmatrix}+d_6\boldsymbol{e}_6$$

$$\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{p}_7-\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}c_1(a_3c_{23}+d_4s_{23})\\s_1(a_3c_{23}+d_4s_{23})\\a_3s_{23}-d_4c_{23}\end{bmatrix}+d_6\boldsymbol{e}_6$$

$$\boldsymbol{r}_4=\boldsymbol{p}_7-\boldsymbol{p}_4=\begin{bmatrix}c_1s_{23}d_4\\s_1s_{23}d_4\\-d_4c_{23}\end{bmatrix}+d_6\boldsymbol{e}_6$$

$$\boldsymbol{r}_5=\boldsymbol{r}_6=\boldsymbol{p}_7-\boldsymbol{p}_5=d_6\boldsymbol{e}_6$$

式中，$\boldsymbol{p}_i$ 表示坐标系{i}原点在坐标系{1}下的位置矢量。根据式(4.58)，则可以推导出 6R 机械臂的雅可比矩阵。

4.2.3　雅可比矩阵的变换

在坐标系{1}下，通过以上推导可知，当第 i 关节为转动关节时，雅可比矩阵第 i 列为

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_i\\ \boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{r}_i\end{bmatrix}$$

当第 i 关节为移动关节时，雅可比矩阵第 i 列为

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{e}_i\end{bmatrix}$$

显然，雅可比矩阵的列矢量依赖于所在的坐标系，如果 ${}^k\boldsymbol{e}_i$，${}^k\boldsymbol{r}_i$ 表示在第 k 个坐标系下，则雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 是在第 k 个坐标系下建立的。${}^i\boldsymbol{e}_i$，${}^i\boldsymbol{r}_i$ 表示在第 i 个坐标系下的矢量，变化到坐标系 F_k 下为

$${}^k\boldsymbol{e}_i={}^k\boldsymbol{R}_i{}^i\boldsymbol{e}_i={}^k\boldsymbol{R}_i\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\tag{4.62}$$

$${}^k\boldsymbol{r}_i={}^k\boldsymbol{R}_i{}^i\boldsymbol{r}_i\tag{4.63}$$

式中，${}^k\boldsymbol{R}_i$ 表示第 i 坐标系相对第 k 坐标系的旋转矩阵。在第 i 个坐标下建立的雅可比矩阵要变换到第 k 个坐标系下，可以通过式(4.62)、(4.63)得

$${}^k\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}{}^k\boldsymbol{R}_i & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & {}^k\boldsymbol{R}_i\end{bmatrix}{}^i\boldsymbol{J}\tag{4.64}$$

如图 4.11 所示，假定在坐标系{1}下，已经建立末端速度与关节速率矢量之间的雅可比矩阵为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}={}^1\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\theta}}\tag{4.65}$$

如果末端工具头与另外一个零部件固连接，零部件运动描述点 E 在坐标系{1}下与末端操作点 O 位置关系为 $\overrightarrow{OE}=\boldsymbol{r}_{OE}$，则 E 点的线速度为

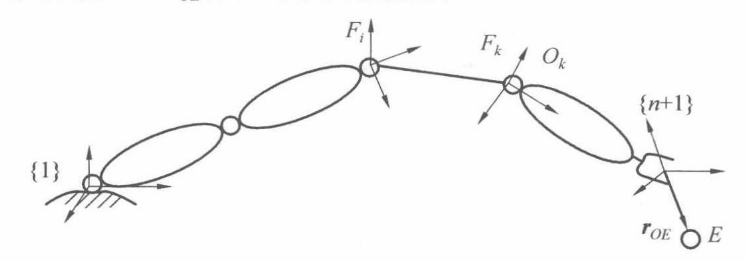


图 4.11　雅可比矩阵在不同坐标系下的表示

$$\boldsymbol{v}_E=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{OE}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}_{EO}) & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \tag{4.66}$$

式中,$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}_{EO})$表示$-\boldsymbol{r}_{OE}$构造的反对称矩阵。则 E 点的速度与关节速率矢量之间的关系为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}_{EO}) & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} {}^1\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{4.67}$$

在 F_k 坐标系下,E 点的角速度和线速度与关节速率矢量 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 之间的关系,可通过以下式得到:

$$\begin{bmatrix} {}^k\boldsymbol{\omega} \\ {}^k\boldsymbol{v}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^k\boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & {}^k\boldsymbol{R}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}_{EO}) & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} {}^1\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{4.68}$$

式中,${}^k\boldsymbol{R}_1$ 表示坐标系 F_1 相对于坐标系 F_k 下的姿态矩阵。

4.2.4 关节速率的求解

在通常情况下,矩阵不能通过符号求逆,$\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 的计算通过数值方法,适合的方法有高斯消元法及 LU 分解法。6R 解耦型机械臂可以用简单的方法求 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$,由式(3.31)可知,两边对时间求导,得

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{p}}_C + \dot{\boldsymbol{Q}}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_C) \tag{4.69}$$

$\boldsymbol{v}_C$ 可以表示为

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_C) \tag{4.70}$$

手腕中心点在最后三个关节轴线交点上,线速度不受后三个关节运动的影响。$\boldsymbol{v}_C$ 可以写成

$$\boldsymbol{v}_C = \dot{\theta}_1\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{r}_1 + \dot{\theta}_2\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{r}_2 + \dot{\theta}_3\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{r}_3 \tag{4.71}$$

在这种情况下,矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 定义为从 O_i 点指向 C 点,另一方面

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}_1\boldsymbol{e}_1 + \dot{\theta}_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \dot{\theta}_6\boldsymbol{e}_6 \tag{4.72}$$

则手腕中心雅可比矩阵定义为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{J}_{12} \\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{4.73}$$

如果机器人各关节均为转动关节,则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_{11} &= [\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3] \\ \boldsymbol{J}_{12} &= [\boldsymbol{e}_4 \quad \boldsymbol{e}_5 \quad \boldsymbol{e}_6] \\ \boldsymbol{J}_{21} &= [\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{r}_1 \quad \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{r}_2 \quad \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{r}_3] \end{aligned} \tag{4.74}$$

关节速度矢量 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 分解为

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_C \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_\omega \end{bmatrix}$$

其中

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_C=\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix},\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_\omega=\begin{bmatrix}\dot{\theta}_4\\ \dot{\theta}_5\\ \dot{\theta}_6\end{bmatrix}$$

式(4.73)可以进一步写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_{21}\dot{\boldsymbol{\theta}}_C&=\boldsymbol{v}_C\\ \boldsymbol{J}_{12}\dot{\boldsymbol{\theta}}_\omega&=\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{J}_{11}\dot{\boldsymbol{\theta}}_C\end{aligned}\tag{4.75}$$

从式(4.75)可以看出,首先要解出 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_C$,然后再解出 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_\omega$,则可以表示为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\theta}}_C&=\boldsymbol{J}_{21}^{-1}\boldsymbol{v}_C\\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_\omega&=\boldsymbol{J}_{12}^{-1}(\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{J}_{11}\dot{\boldsymbol{\theta}}_C)\end{aligned}\tag{4.76}$$

式中,$\boldsymbol{J}_{21}^{-1}$,$\boldsymbol{J}_{12}^{-1}$可以计算为

$$\begin{aligned}&\det(\boldsymbol{J}_{21})=(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{r}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{r}_3)\\ &\det(\boldsymbol{J}_{12})=\boldsymbol{e}_4\times\boldsymbol{e}_5\cdot\boldsymbol{e}_6\\ &\boldsymbol{J}_{21}^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{J}_{21})}\begin{bmatrix}[(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{r}_2)\times(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{r}_3)]^{\mathrm{T}}\\ [(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{r}_3)\times(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{r}_1)]^{\mathrm{T}}\\ [(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{r}_2)]^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\\ &\boldsymbol{J}_{12}^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{J}_{12})}\begin{bmatrix}(\boldsymbol{e}_5\times\boldsymbol{e}_6)^{\mathrm{T}}\\ (\boldsymbol{e}_6\times\boldsymbol{e}_4)^{\mathrm{T}}\\ (\boldsymbol{e}_4\times\boldsymbol{e}_5)^{T}\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.77}$$

4.2.5　奇异位形分析

如果已知末端速度,计算关节速率 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 时,雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 不可逆(或者称为奇异)时,则无法计算。此时,所对应着的机器人的位形称为奇异位形,当机器人为非冗余驱动时,雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 满足

$$\det(\boldsymbol{J})=0\tag{4.78}$$

时,机器人必然处于奇异位形。

在满足此条件下,瞬时存在非零的关节速率矢量 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$,而机器人末端速度在某一方面输出为零,即无限小的运动在末端某一方向无法完成或者说机器人末端此时失去一个或者多个自由度。

【例 4.8】　分析平面 2R 机械臂奇异位形,参考式(4.41),雅可比矩阵的行列式的值为

$$\det(\boldsymbol{J})=l_1l_2\sin\theta_2$$

令 $\det(\boldsymbol{J})=0$,则 $\theta_2=0,\pi$,所对应的机构位形如图 4.12 所示。

当 $\theta_2=0,\pi$ 时,雅可比矩阵的列矢量$[\boldsymbol{J}_1\quad\boldsymbol{J}_2]$方向平行,机械臂末端瞬时沿此方向的垂直方向无法移动一个极小位移,此时 2R 机械臂自由度由 2 降为 1。

在解耦型机器人关节速率计算时,已经假设 $\boldsymbol{J}_{12}$,$\boldsymbol{J}_{21}$ 非奇异。如果 $\boldsymbol{J}_{21}$ 奇异,则关节速率 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 无法计算,而 $\boldsymbol{J}_{12}$ 奇异,$\boldsymbol{J}_{21}$ 非奇异时,可以计算出前三个关节的速率。首先分析 $\boldsymbol{J}_{21}$,它决定了关节速率 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 是否可能解出,$\boldsymbol{J}_{21}$ 矩阵包含三个列矢量 $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{r}_1$,$\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{r}_3$,因此三个矢量共面或其中两个矢量平行,或至少有一个矢量为零,则 $\boldsymbol{J}_{21}$ 奇异。一般解耦型机器人两个连续

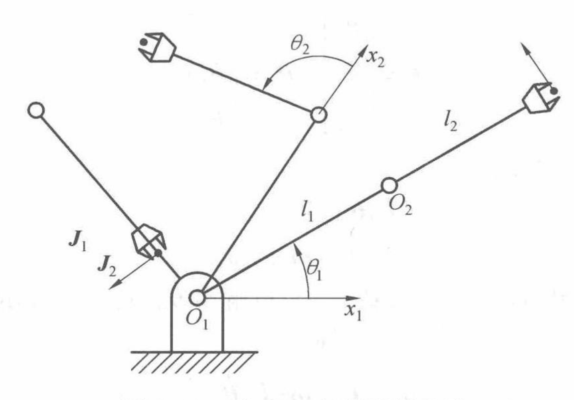


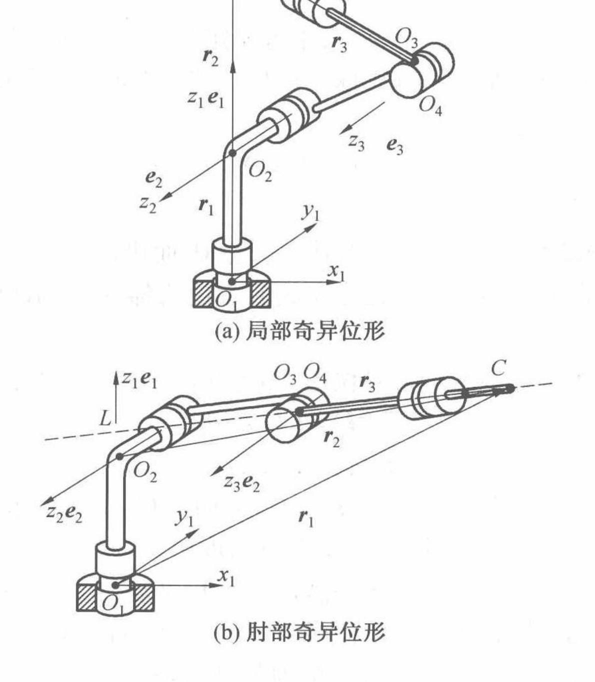
图 4.12　平面 2R 机构奇异位形

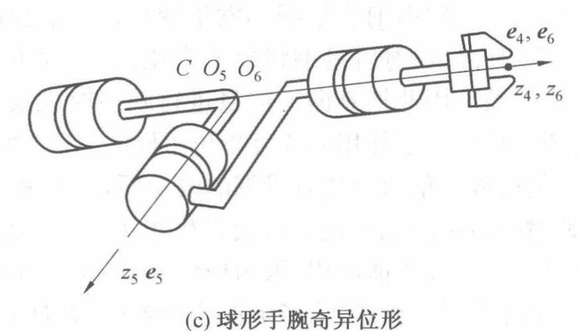
的轴垂直或者平行，如图 4.13(a)所示，假设第 1，2 轴垂直，手腕中心 C 点位于两轴相交的平面 π_{12} 上，若 C 点恰好位于矢量线 $\boldsymbol{e}_1$ 上，此时 $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{r}_1=0$，否则 $(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{r}_1)\parallel(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{r}_2)$，$\det(\boldsymbol{J}_{21})=0$。显然，瞬时前两轴的运动只能使 C 点在垂直 π_{12} 平面方向运动，此时无法在 π_{12} 平面内且沿与 $\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{r}_3$ 垂直方向运动，此种奇异称为肩部奇异(Shoulder Singularity)。如果第 2 与第 3 轴平行，C 点位于两条轴线所在的平面 π_{23} 上，此时 $(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{r}_2)\parallel(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{r}_3)$，$\det(\boldsymbol{J}_{21})=0$，$C$ 点瞬时无法在 π_{23} 平面上且向与 $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{r}_1$ 垂直的方向移动，此时奇异位形称为肘部奇异位形(Elbow Singularity)。

当 $\boldsymbol{J}_{12}$ 奇异不可逆时，手腕处于奇异位形，手腕三条转动轴线共面时，有

$$\det(\boldsymbol{J}_{12})=\boldsymbol{e}_4\times\boldsymbol{e}_5\cdot\boldsymbol{e}_6=\boldsymbol{0} \tag{4.79}$$

可以想象，当轴 4 和轴 6 共线时，满足式(4.79)的条件，如图 4.13(c)所示。





(c) 球形手腕奇异位形

图 4.13　6R 型机械臂奇异位形

4.2.6　机器人性能指标

对于瞬时确定的位形 $\boldsymbol{\theta}$,$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 定义了一个线性系统,可以认为 $\boldsymbol{J}$ 是输入 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 产生输出 $\boldsymbol{t}$ 的比例影射,定量分析此比例影射是一件有意义的工作。雅可比矩阵把 n 维关节空间速率影射到 n 维任务空间末端速度,在一般情况下,$\boldsymbol{t}$ 前三个元素的单位为 rad/s,后三个元素的单位为 m/s。关节速率矢量 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 的单位依赖关节的类型,不必要有相同的单位。如果所有关节是转动关节,则 $\boldsymbol{J}$ 矩阵前三行是无量纲的,后三行是长度。对矩阵 $\boldsymbol{J}$ 进行奇异值分解为

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \tag{4.80}$$

式中,$\boldsymbol{U}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{V}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是正交矩阵(旋转矩阵),$\boldsymbol{\Sigma}\in\mathbf{R}^{n\times n}$。$\sigma_i$ 是雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的奇异值。围绕 $\boldsymbol{J}$ 进行的映射可以表达为一个 n 维的椭球映射,向量在映射后与映射前的模长之比称为映射的放大倍数。$\boldsymbol{J}$ 由大到小的 n 个奇异值 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n\geqslant0$ 为映射椭球的六个主轴半径,或称为沿椭球 n 个主轴方向的映射放大倍数。

1. 条件数指标

如果 $\boldsymbol{J}$ 是奇异的,则椭圆球至少一个半轴退化为零,另一方面如果矩阵 $\boldsymbol{J}$ 是各向同性(Isotropic)的,则奇异值相等,它的影射是从一个单位球影射成另一个放大或缩小的球。串联机器人的雅可比矩阵,可将关节速度空间的单位球通过旋转、比例放大、旋转变换后影射到任务空间笛卡儿速度的一个椭圆球,如果雅可比矩阵的各个元素具有相同的单位,则可以定义条件数 cond($\boldsymbol{J}$)为 $\boldsymbol{J}$ 的最大值 σ_1 与最小值 σ_n 的比,即

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{J})=\frac{\sigma_1}{\sigma_n} \tag{4.81}$$

该指标也称各向同性指标,强调沿各方向的映射放大倍数不能差距太大。因为 σ_1 为映射的最大放大倍数,σ_6 为映射的最小放大倍数,二者的比值越接近于 1,表示沿各方向进行的映射放大倍数越接近。当比值为 1 时,沿各方向进行的映射的放大倍数完全相等,这种情况称为各向同性。另一方面,当雅可比矩阵最小奇异值为零时,条件数无穷大,可以看成从关节空间单位球映射到任务空间失真,此时椭圆球一个半轴退化为零,在三维空间中,椭圆球退化为一个椭圆。在应用以上指标时应注意:如果串联机器人各关节为转动关节,$\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 对 $\boldsymbol{\omega}$

等与旋转有关物理量的映射，由于映射前后量纲不发生变化，因此是纯粹的放大倍数关系；而 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 对 $\boldsymbol{v}$ 线速度物理量的映射，在映射后量纲将发生变化，因此并不是纯粹的放大倍数关系，而是一种带量纲的放大倍数。因此把 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 向 $\boldsymbol{v}$ 向量进行映射时就会产生一些问题，比如，当把机构按比例缩放时，或者仅仅由于使用的长度单位不同时，各种性能指标就会发生很大变化。这是由于一方面映射的放大倍数会随着量纲的改变而改变；另一方面，与量纲无关量同与量纲有关量在整体映射向量中的相对比重也会发生很大变化。总体而言，若雅可比矩阵中元素单位不同，则条件数的定义不能应用，因为单位不同，无法将奇异值从大到小排列，这就给对机构的性能的正确评价带来困难，为了解决这个矛盾，需要定义一个特征长度比例因子，用来处理具有长度单位的雅可比矩阵元素，产生新的无量纲雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}^*$。

2. 可操作性指标

在经典控制理论中，经常分析一个单输入、单输出称为脉冲响应系统，通过单位输入分析系统的性质。在多维系统里，基本与之类似，但输入是系统输入变量的单位范数，考虑串联机器人关节速率矢量范数为

$$\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\|^2=\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2+\cdots+\dot{\theta}_n^2\leqslant 1 \tag{4.82}$$

如果雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 非奇异，则

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{t}$$

$$\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\|^2=\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\theta}}=(\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{t})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{t})=\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{t} \tag{4.83}$$

式(4.82)定义了一个 n 维椭圆球，称为可操作性椭圆球。将式(4.80)代入式(4.83)，得

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{t}=(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-2}(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}) \tag{4.84}$$

式中

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-2}=\begin{bmatrix}\sigma_1^{-2} & & & \\ & \sigma_2^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^{-2}\end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{t}$ 经过旋转（正交矩阵 $\boldsymbol{U}$）得到 $\boldsymbol{w}$，代入式(4.84)，可重新写为

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-2}\boldsymbol{w}=\sum\frac{w_i^2}{\sigma_i^2}\leqslant 1,i=1,2,\cdots,n \tag{4.85}$$

式中，w_i 为矢量 $\boldsymbol{w}$ 中的项，$\|\boldsymbol{w}\|=\|\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}\|=\|\boldsymbol{t}\|$，如果输入（关节速率）的范数矢量是单位范数，那么输出（末端速度）将位于式(4.83) $\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}$ 给定的椭圆球之内。可操作性度量指标可以定义为

$$|\det(\boldsymbol{J})|=\sqrt{\det(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})}=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n \tag{4.86}$$

该指标也称映射体积指标，因为 $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ 为映射椭球 n 个主轴半径之积，是与映射椭球体积相关的量，强调了各方向映射的整体特性。

条件数指标和可操作性指标均可用于对机构的整体综合性能进行评价，二者基本上是一致的。目前比较流行的是采用各向同性指标作为串联机器人整体综合性能评价的主要指标，但这项指标比较明显的缺陷是：有时尽管 σ_1 与 σ_n 都增大，但只要 σ_n 的增幅超过 σ_1 的增幅，便得出机构性能变好的结论，这显然不太合理。而可操作性指标则将映射的体积作为

考察对象,更适宜用于机构整体性能的评价。还有一个原因在于映射椭球的最长轴或最短轴是经常切换的,因此 σ_1 与 σ_n 之比连续但不光滑,当采用条件数指标作为优化目标函数时,有可能会陷入局部最优点;而可操作性指标则是连续光滑的。因此,可将无量纲雅可比矩阵的行列式值 $|\det(\boldsymbol{J}^*)|$ 作为机器人性能评价的主要指标,该值越大,表示机器人的整体性能越好。

【例4.9】 考虑平面2R机械臂,如图4.3所示,分析在不同位形下的条件数指标。令几何参数为 $l_1=\sqrt{2}$ m, $l_2=1$ m,则其雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}-(\sqrt{2}s_1+s_{12}) & -s_{12}\\ \sqrt{2}c_1+c_{12} & c_{12}\end{bmatrix}$$

当 $\theta_1=0,\theta_2=\pi/4$ 时,关节速率单位矢量圆映射到任务空间末端速度,如图4.14(a)所示,此时

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}2.414\,2 & 0\\ 0 & 0.4142\end{bmatrix}$$

条件数 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{J})=5.824$。当 $\theta_1=0,\theta_2=3\pi/4$ 时,此时

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

条件数 $\mathrm{cond}(J)=1$。当 $\theta_1=0,\theta_2=0$ 时,此时

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}2.613\,1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

关节速率单位矢量圆映射到任务空间末端速度如图4.14(b)所示,显然,当 $\theta_2=0$ 时,雅可比矩阵奇异,任务空间速度映射退化为一条直线,条件数 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{J})\to\infty$。

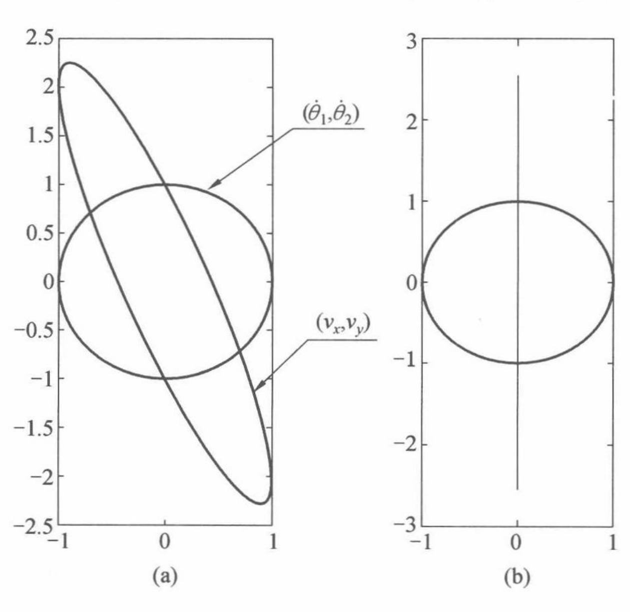


图4.14 速度映射图

本章小结

本章首先从刚体一般的速度分析入手,分析了刚体上点速度、加速度以及相对刚体平移速度、加速度的表达形式,讨论了串联工业机器人雅可比矩阵,重点研究了利用微分方法及几何方法求解雅可比矩阵,并基于雅可比矩阵分析了机器人奇异位形以及运动性能评价指标。

第5章　刚体一般运动及螺旋

在笛卡儿坐标空间里，刚体瞬时最一般的运动形式为螺旋运动，即瞬时刚体存在绕着空间某轴线的转动与沿此轴线方向的移动，即刚体旋转又平移，刚体的纯转动和纯移动只是螺旋运动的特殊情况。其瞬时运动形态可等效于如图5.1所示的圆柱螺旋线运动，刚体转动并沿螺旋轴线方向平移，假定此时刚体的角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，螺旋轴单位矢量为 $\boldsymbol{e}$，刚体平移速度 $\boldsymbol{v}$ 显然与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 及螺距大小有关，两者为依赖的关系，从螺旋轴指向点 $\boldsymbol{A}$ 的矢量为 $\boldsymbol{r}$，则此时刚体上点 $\boldsymbol{A}$ 的速度可以表示为 $[\boldsymbol{\omega} \quad (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v})]^{\mathrm{T}}$。

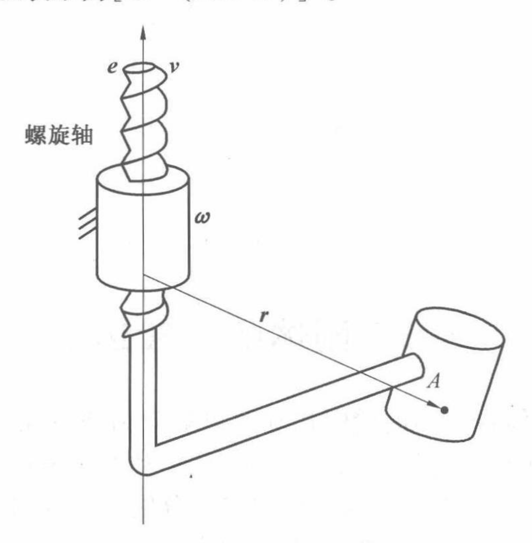


图5.1　刚体瞬时等效螺旋运动

5.1　空间直线的 Plücker 坐标

空间刚体的一般运动形式为螺旋运动，螺旋轴线在空间方向及位置的表示是首先要解决的问题。其表示可采用 Plücker 坐标表示，Plücker 第一次提出在三维空间任意一条直线的坐标表达形式。假定空间两个点 P_1 和 P_2，按一定的顺序连接，就决定了空间内一条直线 L 的方向和位置，两点的空间位置矢量分别为 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$，如图5.2所示。如果有一点 P 位于直线上，其位置矢量为 $\boldsymbol{r}$，则与点 P_1 和 P_2 关系为

$$(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)=0 \tag{5.1}$$

式(5.1)展开为

$$(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_1\times(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=0$$

显然，两个矢量 $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_1\times(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$ 完全定义了直线 L，表示直线在空间的方向和位置，定义一个六维列矩阵包含两个矢量，即 $[\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1 \quad \boldsymbol{r}_1\times(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)]^{\mathrm{T}}$，矩阵中六个标量元素是直线

L 的 Plücker 坐标,进而令

$$e=\frac{r_2-r_1}{|r_2-r_1|},n=r_1\times e \tag{5.2}$$

重新得到的列矩阵$[e \quad n]^T$ 是直线 L 的规范 Plücker 坐标。单位矢量 e 决定了直线 L 的方向,无单位,而 n 决定了直线的位置,n 的模表示直线到原点的距离。n 称为矢量 e 对原点的线矩(Moment of Line),可以这样理解:在直线 L 上,沿直线 L 方向 e 作用一个单位力,n 是其单位力绕着原点的力矩。本书仅使用规范的 Plücker 坐标,因此 Plücker 坐标用$[e \quad n]^T$表示,并且直线 L 的规范 Plücker 坐标有以下约束条件:$e\cdot e=1,n\cdot e=0$。

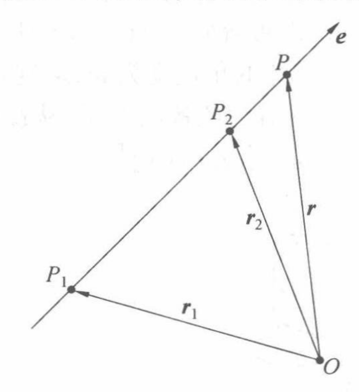


图 5.2 过两点的直线 L

5.2 刚体的一般运动

下面分析为什么刚体在空间的瞬时运动可以等效为绕沿同一轴线的螺旋运动。如图 5.3 所示,A,P 为同一刚体上的两个点,点 A 为刚体运动的参考点(或描述点),点 P 为刚体上任意一点,两点在参考坐标系下的原始位置矢量分别为 a,p,刚体在空间做一般运动后,A,P 点运动到点 A',P',此时位置矢量为 a',p',刚体在空间的旋转运动用旋转矩阵 R 描述,可以表示为

$$p'=a'+R(p-a) \tag{5.3}$$

从式(5.3)可以看出,当给定 a,a',p 和 R 时,可以确定矢量 p',即可以得到点 P 在空间的位置。令 d_A,d_P 分别表示点 A,P 在旋转后的位移,表示为

$$d_A=a'-a,d_P=p'-p \tag{5.4}$$

从式(5.3)和式(5.4)可以获得 d_P,即

$$\begin{aligned}d_P&=a'-p+R(p-a)=\\&(a'-a)+R(p-a)-(p-a)=\\&d_A+(R-I)(p-a)\end{aligned} \tag{5.5}$$

从式(5.5)可知,刚体上任意点 P 的位移,可以由参考点 A 的位移、刚体旋转运动 R 和初始位形下的矢量 $p-a$ 确定。如果位移 d_P 已知,则矢量 p'容易确定。根据欧拉定理:刚体绕定点的任意有限转动可以由绕过该点某个轴的一次有限转动来实现,假设刚体旋转矩阵为 R,由刚体绕空间单位方向为 e 的轴线转动 θ 角来实现,参考图 2.19,式(5.5)两边乘以 e^T,得

$$e^{\mathrm{T}}d_P=e^{\mathrm{T}}d_A+e^{\mathrm{T}}(R-I)(p-a) \tag{5.6}$$

因为 $Re=e$,有 $e^{\mathrm{T}}=e^{\mathrm{T}}R$,则式(5.6)为

$$e^{\mathrm{T}}d_P=e^{\mathrm{T}}d_A\equiv d_0 \tag{5.7}$$

式(5.7)说明,刚体上所有点的位移沿着轴线 e 有相同大小的投影长度。

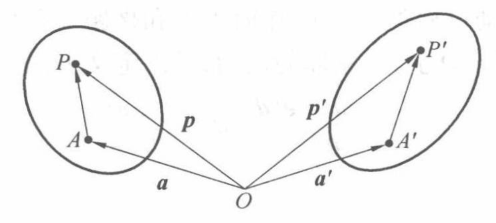


图 5.3　刚体的一般运动

【定理 5.1】　(Mozzi-Chasles)给定一个刚体的一般运动,存在点的集合构成的轴线 L,在 L 上的点具有相同的位移最小值。而且,轴线 L 和最小位移方向与刚体旋转轴线方向平行。

证明　任意点 P 的位移 d_P,可以分解成两个垂直的分量,参考图 5.4,即平行于旋转轴线 e 的 $d_{/\!/}$ 和垂直于 e 的分量 $d_{\perp}$,则

$$d_P=d_{/\!/}+d_{\perp} \tag{5.8}$$

式中,参考附录 A 附式(16)和(17),$d_{/\!/}=ee^{\mathrm{T}}d_P=d_0e$,$d_{\perp}=(I-ee^{\mathrm{T}})d_P$。显然

$$|d_P|^2=|d_{/\!/}|^2+|d_{\perp}|^2=d_0^2+|d_{\perp}|^2 \tag{5.9}$$

在式(5.9)中,如果刚体在运动时其上任意点 P 的 $|d_P|$ 模数最小,那么只能令 $|d_{\perp}|$ 为零,则 d_P 平行于 e,此时对于瞬时运动,点 P 必然位于轴线 e 上,仅沿 e 做平移运动,位移矢量为

$$d_P=d_0e \tag{5.10}$$

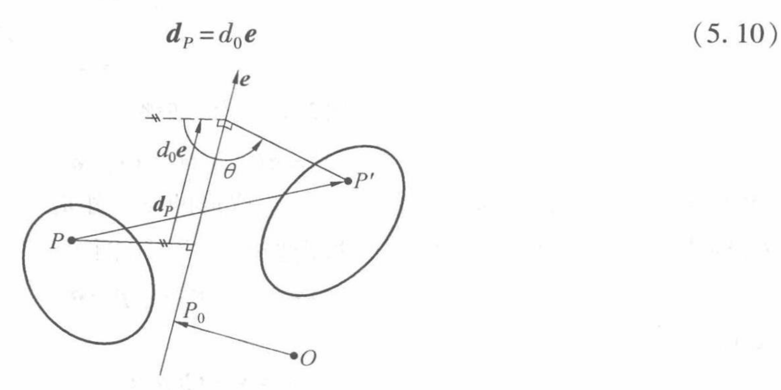


图 5.4　刚体一般运动的分解

上面推导证明了 Mozzi-Chasles 定理第一部分,即存在点的集合构成的轴线 L,在 L 上的点具有相同的位移最小值。第二部分轴线 L 平行旋转轴也容易证明,如果刚体上存在一个点 P^*,刚体瞬时运动时 P^* 点位移具有最小值,则垂直于 e 的位移矢量必须为零,参考式(5.5),得

$$d_{\perp}^*=(I-ee^{\mathrm{T}})d_{P^*}=(I-ee^{\mathrm{T}})d_A+(I-ee^{\mathrm{T}})(R-I)(p^*-a)=0 \tag{5.11}$$

参考式(5.6),并展开进一步推导为

$$(I-ee^{\mathrm{T}})d_A+(R-I)(p^*-a)=0 \tag{5.12}$$

如果此时定义一条轴线 L 通过点 P^* 且平行于 $\boldsymbol{e}$,轴线上所有点的位置矢量可以定义为 $\boldsymbol{p}^*+\lambda\boldsymbol{e}$,满足式(5.12),可知所有最小位移的点位于此轴线上。

Mozzi-Chasles 定理表明,刚体的一般空间位移为沿空间某条轴线平移和绕此条轴线旋转的合成,如此平移和旋转合成称为螺旋位移。进一步可以表述为:刚体从一个给定的位姿运动到任意的位姿,其运动过程类似于具有轴线 L 和螺距 h 的螺旋运动,轴线 L 称为螺旋轴,瞬时 d_0 为运动不变量,因此对于刚体的运动,可以定义出螺旋轴 L 和螺距 h,其螺距 h 为

$$h\equiv\frac{d_0}{\theta}=\frac{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_P}{\theta}\ \text{或}\ h\equiv\frac{2\pi d_0}{\theta}$$

式中,h 的单位为 m/rad。

5.3 刚体的一般瞬时运动

令 $\boldsymbol{a}_0$ 和 $\boldsymbol{p}_0$ 表示点 A,P 在初始参考位形 C_0 时的位置矢量,$\boldsymbol{a}(t)$,$\boldsymbol{p}(t)$ 为时间为 t,刚体上相同点在位形 C 的位置矢量,如果刚体开始做最一般的运动,其所有点都是动点,在初始点 A_0 处建立参考坐标系,如图 5.5 所示,则 P 点的位置矢量写为

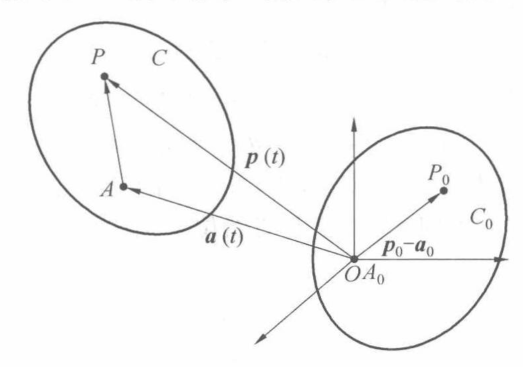


图 5.5 刚体一般瞬时运动

$$\boldsymbol{p}(t)=\boldsymbol{a}(t)+\boldsymbol{R}(t)(\boldsymbol{p}_0-\boldsymbol{a}_0) \tag{5.13}$$

式中,$\boldsymbol{R}(t)$ 为时间为 t 时刚体相对于初始位形的旋转矩阵。注意,式(5.13)需要初始位形 C_0 时点 A,P 的位置矢量,点 P 的速度通过式(5.13)两边对时间微分表示为

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t)=\dot{\boldsymbol{a}}(t)+\dot{\boldsymbol{R}}(t)(\boldsymbol{p}_0-\boldsymbol{a}_0) \tag{5.14}$$

进而

$$\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{v}_A+\Omega(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}) \tag{5.15}$$

写成角速度矢量的形式为

$$\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}) \tag{5.16}$$

相似于定理 5.1,式(5.16)两边点乘 $\boldsymbol{\omega}$,得

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}_A=|\boldsymbol{v}_{/\!/}||\boldsymbol{\omega}| \tag{5.17}$$

刚体上所有点线速度在角速度方向上的投影相等。类似 Mozzi-Chasles 定理,可以知道:当刚体做一般运动时,瞬时存在一条直线 L,位于此直线上的所有刚体上的点具有相同的速度 $\boldsymbol{v}_{/\!/}$,且具有最小值,方向与角速度方向平行,此直线称为刚体运动的瞬时螺旋轴(Instant Screw Axis,ISA)。从以上分析可知,刚体的瞬时运动等同于绕沿 ISA 的螺旋运动,随着

刚体在空间的运动，螺旋轴也要变化，刚体的运动称为瞬时螺旋运动（Instantaneous Screw Motion），因为 $\boldsymbol{v}_{/\!/}$ 平行于 $\boldsymbol{\omega}$，故可以写成

$$\boldsymbol{v}_{/\!/}=h\boldsymbol{\omega} \tag{5.18}$$

螺旋轴 L 通过 Plücker 坐标唯一确定，定义为

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{n}\end{bmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{e}$ 为直线 L 的方向；$\boldsymbol{n}$ 为绕原点的线矩，即

$$\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|},\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e} \tag{5.19}$$

式中，$\boldsymbol{r}$ 为螺旋轴上任意点的位置矢量。$\boldsymbol{e}$ 的定义是唯一的，但在刚体瞬时纯平移时，例如，瞬时 $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{e}$ 为单位矢量且平行于平移运动的方向。在几何上，由滑动矢量 $\boldsymbol{e}$ 和一个标量配成的一对，称为螺旋（Screw），标量 h 称为螺距（Pitch of the Screw）。螺旋是基本的几何本质，而运动螺旋是刚体运动物理的阐述。瞬时螺旋的螺距 h 可以定义为

$$h=\frac{|\boldsymbol{v}_{/\!/}|}{|\boldsymbol{\omega}|}=\frac{\boldsymbol{v}_P\cdot\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2}\text{ 或者 }h=\frac{2\pi|\boldsymbol{v}_{/\!/}|}{|\boldsymbol{\omega}|}$$

因此，刚体的瞬时运动可通过直线 L、螺距 h 和转动幅度（Amplitude）$|\boldsymbol{\omega}|$ 定义。故刚体的瞬时运动可由六个独立参数确定，即轴线 L 的四个 Plücker 坐标参数、一个螺距参数和一个幅度参数。

5.4 刚体的运动螺旋

在这里为了和其他著作符号保持一致，重新定义为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{e},\boldsymbol{s}_0=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e}$$

两个矢量 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{s}_0$ 完全定义了直线 L 在空间的方向和位置，定义一个包含两个矢量的六维数组为

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}\\ \boldsymbol{s}_0\end{bmatrix} \tag{5.20}$$

称为线矢量，记为大写 $\boldsymbol{S}$，或者写成对偶的形式为

$$\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{s};\boldsymbol{s}_0) \tag{5.21}$$

式中，$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}=1$，$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}_0=0$。当 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}_0\neq0$ 时，是比线矢量更为一般的情况，轴线 Plücker 坐标参数和螺距参数所合成的六维数组通常称为螺旋，记为 $\$$，即

$$\$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}\\ \boldsymbol{s}^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e}+h\boldsymbol{e}\end{bmatrix} \tag{5.22}$$

注意，式(5.20)、(5.22)中矢量 $\boldsymbol{s}_0$，$\boldsymbol{s}^0$ 的区别。刚体的角速率乘以此螺旋得到刚体的瞬时运动矢量，称为运动螺旋（Twist），记为 $\boldsymbol{t}$。通常一个 Twist 可以认为是一个六维矩阵，完整地定义了刚体的速度场，包含刚体上任何点的三个角速度分量和三个线速度分量。如图5.6所示，刚体瞬时螺旋轴线方向为 $\boldsymbol{s}$，螺距为 h，刚体上一个点 O 的指向螺旋轴线的矢量为 $\boldsymbol{r}$，瞬时刚体角速率为 $\dot{\theta}$，则此时点 O 的速度为

$$t=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}=\dot{\boldsymbol{\theta}}\,\$=\dot{\theta}\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}\\ \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}+h\boldsymbol{s}\end{bmatrix}\tag{5.23}$$

式中，$\dot{\theta}=|\boldsymbol{\omega}|$，$\boldsymbol{\omega}=\dot{\theta}\boldsymbol{s}$ 为刚体角速度，其方向平行于 $\boldsymbol{s}$。点 O 的线速度为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times(-\boldsymbol{r})+h\boldsymbol{\omega}=\dot{\theta}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}+h\boldsymbol{s})\tag{5.24}$$

$\dot{\theta}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})$ 为转动引起的线速度，垂直 $\boldsymbol{s}$，记为 $\boldsymbol{v}_{\perp}$，$\dot{\theta}h\boldsymbol{s}$ 是平动的速度，记为 $\boldsymbol{v}_{/\!/}$，其点 O 的线速度是螺旋运动合成的速度。

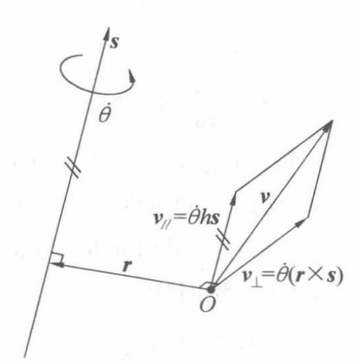


图 5.6 运动螺旋示意图

参考式(5.23)可知，已知刚体上某点的速度为$[\boldsymbol{\omega}\quad \boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}$，如果 $\boldsymbol{\omega}\neq\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{\omega}/|\boldsymbol{\omega}|\neq\boldsymbol{0}$，则在以此点为原点所建立的坐标系下，刚体瞬时螺旋运动的轴线位置及螺距为

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{\omega}|^{2}},\quad h=\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{\omega}|^{2}}\tag{5.25}$$

在螺旋运动中，一个特殊的例子是螺距 h 无穷大，对于此种情况，本书采用不太严格的极限的方式证明。令 $h\to\infty$，则

$$\lim_{h\to\infty}\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}\\ \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}+h\boldsymbol{s}\end{bmatrix}=\lim_{h\to\infty}h\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}/h\\ (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})/h+\boldsymbol{s}\end{bmatrix}=(\lim_{h\to\infty}h)\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{s}\end{bmatrix}\tag{5.26}$$

将无穷螺距的螺旋定义成$(\boldsymbol{0};\boldsymbol{s})$的形式，称为偶量。其几何意义是：在法向量为 $\boldsymbol{s}$ 的平面内，无穷远处直线的 Plücker 坐标。此时，对于任何选择的原点，无穷远处的一个无穷小的矢量，对原点的线矩皆为 $\boldsymbol{s}$，与原点无关，说明$(\boldsymbol{0};\boldsymbol{s})$为自由矢量。

5.5 机构中连杆基本的瞬时运动

5.5.1 连杆的瞬时转动

若刚体与基座以 R 关节相连，瞬时绕着关节轴线 $\boldsymbol{s}$ 轴转动，如图 5.7 所示，转动的角速率为 $\dot{\theta}$，在刚体有上一点 O，从 O 点指向旋转轴线的矢量为 $\boldsymbol{r}$，在参考坐标系{1}下，刚体的 O 点速度表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\omega}=\dot{\theta}\boldsymbol{s}\\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times(-\boldsymbol{r})\end{cases}\tag{5.27}$$

在 O 点建立一个坐标系，其方向与参考坐标系{1}一致，在此坐标系下，刚体回转轴的线矢量为

$$S=\begin{bmatrix} s \\ r\times s \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

此坐标系原点 O 的速度为

$$\begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}=\dot{\theta}S=\dot{\theta}\begin{bmatrix} s \\ r\times s \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

式中，ω 表示刚体转动时的角速度；v 表示刚体 O 点处的线速度。

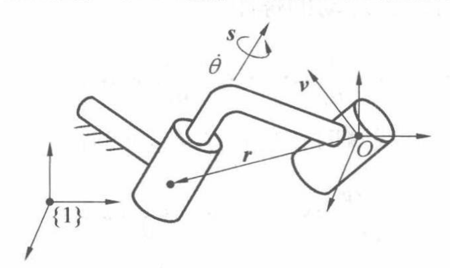


图 5.7　刚体的瞬时转动

5.5.2　连杆的瞬时移动

若刚体与基座以关节 P 相连，瞬时沿着关节轴线以方向 s 移动，如图 5.8 所示，其速度的矢量为 $\dot{d}s$，其中 $\dot{d}$ 是移动速率。对于移动的刚体，其上所有点具有相同的移动速度，说明矢量 s 的平移并不改变刚体的运动状态。刚体的移动速度可以看成是由一个瞬时转动产生的，此转动轴线位于单位法向量为 s 的平面内，距 s 无穷远，在平面内，位于无穷远处的直线 Plücker 坐标为$(\mathbf{0};s)$，因此刚体瞬时平移速度等效为绕此无穷远处轴线的无穷小的转动形成的速度，刚体的速度可以表示为

$$\begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}=\dot{d}\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ s \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

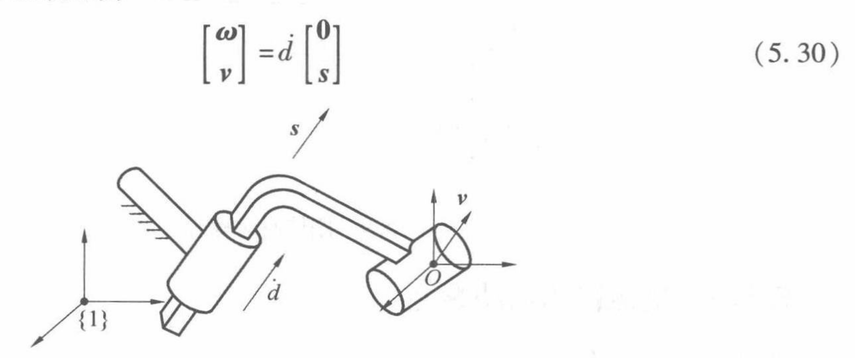


图 5.8　刚体的瞬时移动

5.5.3　连杆的瞬时螺旋运动

如图 5.9 所示，空间 RP 机构，在末端坐标原点 O_3 处建立一个与基坐标系方向一致的坐标系 F_{3B}，在此坐标系下，杆 1 绕关节轴线转动，瞬时转动为 $\dot{\theta}_1[s_1 \quad r_1\times s_1]^{\mathrm{T}}$，杆 2 相对杆 1 做平移运动，瞬时移动为 $\dot{d}_2\ [\mathbf{0} \quad s_2]^{\mathrm{T}}$，杆 2 的绝对瞬时运动是两个运动的合成，叠加为

$$\begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}=\dot{\theta}_1\begin{bmatrix} s_1 \\ r_1\times s_1 \end{bmatrix}+\dot{d}_2\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ s_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_1 & \mathbf{0} \\ r_1\times s_1 & s_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} \tag{5.31}$$

式(5.31)进一步写为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}=[\ \$_1\quad \$_2]\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{d}_2\end{bmatrix}$$

式中,$\$_1$,$\$_2$ 组成一个螺旋系,即

$$[\ \$_1\quad \$_2] \tag{5.32}$$

依据式(5.25),杆 2 瞬时螺旋运动的螺距为

$$h=\frac{1}{\dot{\theta}_1}\dot{d}_2\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=\frac{\dot{d}_2}{\dot{\theta}_1}\cos\alpha_{12} \tag{5.33}$$

式中,α_{12}为两轴线的扭角。此轴线瞬时在坐标系 F_{3B}下的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{\omega}|^2}=\boldsymbol{s}_1\times(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{s}_1)+\frac{\dot{d}_2}{\dot{\theta}_1}(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2) \tag{5.34}$$

在此瞬时,杆 2 同时具有转动运动和平移运动两种运动特性,从式(5.31)可知,杆 2 转动角速度为 $\dot{\theta}_1\boldsymbol{s}_1$,其转动轴线的方向为 $\boldsymbol{s}_1$,杆 2 瞬时沿 $\boldsymbol{s}_1$ 轴平移的速度为 $\boldsymbol{v}_{/\!/}=\dot{\theta}_1 h\boldsymbol{s}_1=\dot{d}_2\cos\alpha_{12}$,点 O_3 处绕着方向为 $\boldsymbol{s}_1$,位置为 $\boldsymbol{r}$ 的轴线瞬时转动形成的线速度为 $\boldsymbol{v}_{\perp}=\dot{\theta}_1(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}_1)$。当 $\boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2$ 时,两轴线的扭角为 $\alpha_{12}=90°$,$\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0$,则式(5.33)中,$h=0$,此时杆 2 瞬时可以等效为纯转动。

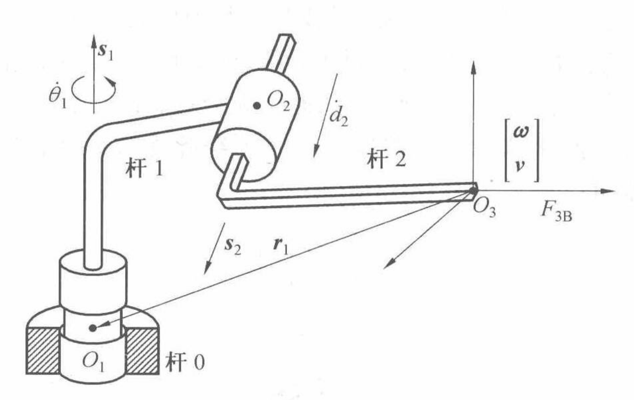


图 5.9 刚体瞬时螺旋运动

5.5.4 机械臂的运动螺旋

通过以上讨论可知:

(1)当 $h=0$ 时,$\$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}\\ \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}\end{bmatrix}$,刚体可等效为纯转动运动,$\$$ 为运动所绕直线的规范 Plücker 坐标。

(2)当 $h=\infty$ 时,$\$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{s}\end{bmatrix}$,刚体可等效为做纯移动,

(3)当 $h\in(0,\infty)$时,$\$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}\\ \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}+h\boldsymbol{s}\end{bmatrix}$,刚体可等效为做螺旋运动。

(4)当 $\boldsymbol{s}=0$,$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}+h\boldsymbol{s}=0$ 时,h 不确定。

当所有的关节都表示成运动螺旋时，串联开环机械臂末端的运动就是所有运动螺旋的线性组合。与第 4 章的雅可比矩阵推导过程比较，其不同之处在于：①在末端运动描述点建一个坐标系$\{F_e\}$，方向与基坐标系一致；②$\boldsymbol{r}_i$ 的指向变为从所建坐标系原点指向坐标 F_i 的原点 O_i。n 个关节的轴线的螺旋在坐标系$\{F_e\}$下为 $\$_1, \$_2, \cdots, \$_n$，第 i 关节转动的速率 $\dot{\theta}_i$ 映射在末端的速度为 $\dot{\theta}_i \$_i$，这样末端杆的运动为各运动螺旋的线性组合，机器人末端瞬时运动可以得到

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}=\dot{\theta}_1 \$_1+\dot{\theta}_2 \$_2+\cdots+\dot{\theta}_n \$_n=[\$_1 \quad \$_2 \quad \cdots \quad \$_n]\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \vdots\\ \dot{\theta}_n\end{bmatrix} \tag{5.35}$$

这里，n 个螺旋，$[\$_1 \quad \$_2 \quad \cdots \quad \$_n]$构成了一个螺旋系，当 $n\leqslant 6$ 且它们线性无关时，此 n 个螺旋就是一个 n 系螺旋。

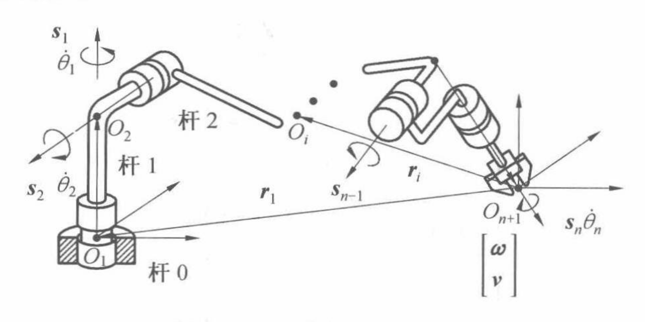


图 5.10　n 关节串联机械臂

5.6　螺旋代数运算

1. 两螺旋的代数和

两螺旋 $\$_1$ 和 $\$_2$，其代数和仍为螺旋，即

$$\$_1+\$_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{s}_2\\ \boldsymbol{s}_1^0+\boldsymbol{s}_2^0\end{bmatrix} \tag{5.36}$$

对于两个螺距为非零有限值的螺旋之和一般仍为螺距非零有限值的螺旋，但也可能出现螺距为零的螺旋。

2. 两螺旋的互易积(Reciprocal Product)

两轴线在空间位置的方向关系如图 5.11 所示，两个螺旋的互易积记为

$$\$_1 \circ \$_2=\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2^0+\boldsymbol{s}_2 \cdot \boldsymbol{s}_1^0 \tag{5.37}$$

空间两个螺旋互易积的几何意义如下：

(1)两线矢量互易积为

$$\boldsymbol{S}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}_1\\ \boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{s}_1\end{bmatrix},\boldsymbol{S}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}_2\\ \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{s}_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_1\circ\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{s}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{s}_2)+\boldsymbol{s}_2\cdot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{s}_1)=$$

$$(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\cdot(\boldsymbol{s}_2\times\boldsymbol{s}_1)=$$
$$-a_{12}\sin\alpha_{12} \tag{5.38}$$

由以上分析可知，如果两条直线平行，则 $\alpha_{12}=0$，互易积为零；如果两条直线相交，其距离为零，互易积也为零。总之，两条直线共面，其互易积为零。

(2)两个螺旋互易积为

$$\$_1\circ\$_2=\boldsymbol{s}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{s}_2+h_2\boldsymbol{s}_2)+\boldsymbol{s}_2\cdot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{s}_1+h_1\boldsymbol{s}_1)=$$
$$(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\cdot(\boldsymbol{s}_2\times\boldsymbol{s}_1)+(h_1+h_2)\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=$$
$$-a_{12}\sin\alpha_{12}+(h_1+h_2)\cos\alpha_{12} \tag{5.39}$$

当两个螺旋互易积为零时，则它们相逆，称 $\$_1$ 和 $\$_2$ 互为反螺旋或者逆螺旋。螺旋 $\$$ 的反螺旋记为 $\$^r$。从式(5.39)可以看出，两个螺旋是否相逆，与瞬时两螺旋螺距、连杆的长度及扭角有关，而不依赖于 $\$_1$ 和 $\$_2$ 所在的坐标系，即与坐标系无关，这简化了螺旋应用于自由度分析、机构综合等领域坐标变换问题。

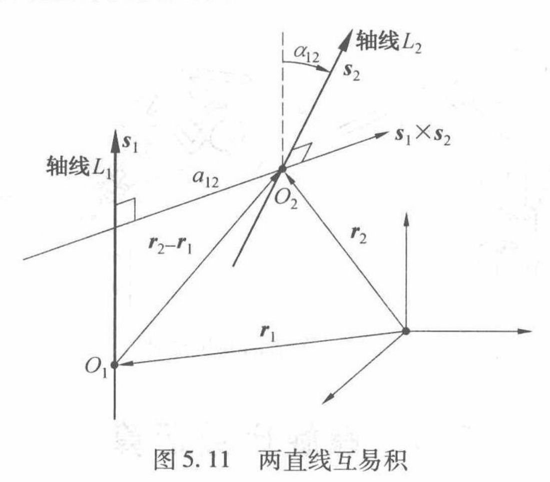


图 5.11　两直线互易积

5.7　刚体上作用的力螺旋

5.7.1　空间任意力系的平衡方程

一个刚体在平衡状态(加速度为零)，当且仅当，作用在物体上的力系的合成为零，对于任意一点力矩合成为零。

(1) 如果 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n$ 是作用于刚体的力系，其合成力为 $\boldsymbol{f}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f}_i$。

(2) 如果 $\boldsymbol{f}_i$ 作用线方向为 $\boldsymbol{s}$，其位置矢量为 $\boldsymbol{r}_i=OP_i$，$\boldsymbol{f}_i$ 相对于点 O 的力矩为 $\boldsymbol{c}_{Oi}=\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{f}_i$，如图5.12所示。相对于点 O 的合成力矩为 $\boldsymbol{c}_O=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{c}_{Oi}$。假定作用于刚体仅为力，没有力偶，但也没有失掉一般性，因为力偶是两个大小相等、方向相反力组成的系统。空间任意力系可以向任意一点的简化，作用于刚体上的空间任意力系 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n$，应用力平衡定理，依次将各力向简化中心 O 点平移，同时附加一个相应的力偶。这样，空间任意力系被空间汇交力系 $\boldsymbol{f}$ 和空间力偶系 $\boldsymbol{c}_O$ 两个简单力系等效替换，如图5.13所示。一旦系统简化到原点，不失一般

性，就可以定义一个合理的参考坐标系，假设 $\boldsymbol{f}$ 的方向定义为 z 轴，$\boldsymbol{c}_O$ 是位于 yz 平面的矢量，令 $\boldsymbol{m}_0$ 和 $\boldsymbol{c}$ 表示 $\boldsymbol{c}_O$ 在 y 轴和 z 轴的投影，如图 5.14 所示。

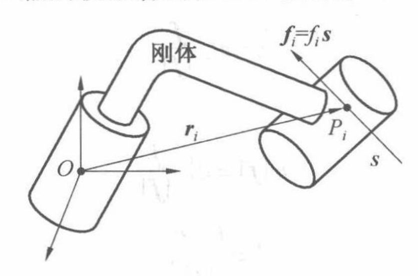


图 5.12 刚体上力的表示

进一步思考，是否能发现一点 A，可以简化力系 $\{\boldsymbol{f},\boldsymbol{c}_O\}$ 到点 A，而后合成的力偶平行于矢量 $\boldsymbol{f}$。如图 5.14 所示，显然存在一个点 A，当力 $\boldsymbol{f}$ 平移到点 A 时，其伴随力偶为 $\boldsymbol{c}_A=\overrightarrow{AO}\times\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{m}_O$，因此在 O 点力系 $\{\boldsymbol{f},\boldsymbol{c}_O\}$ 可以在 A 点简化为等效的力系 $\{\boldsymbol{f},\boldsymbol{c}\}$，$\boldsymbol{f},\boldsymbol{c}$ 方向平行，其方向用单位矢量 $\boldsymbol{s}_A$ 表示，沿着此方向的直线称为中心轴，推导出的结果称为潘索中心轴原理(*Poinsot's Central Axis Theorem*)。在一个刚体上，中心轴是唯一的，不能在刚体上发现另外一个点其合成的力和力偶方向平行。

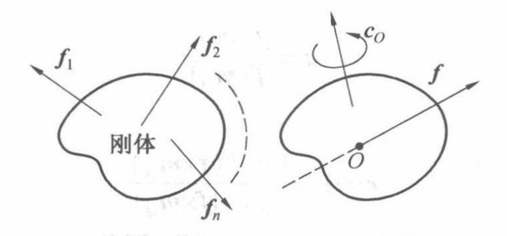


图 5.13 刚体力系等效

六维矢量 $\boldsymbol{w}_O=[\boldsymbol{f}\quad \boldsymbol{c}_O]^{\mathrm{T}}$ 定义为原始系统力 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n$ 和力偶 $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_m$ 在 O 点合成力螺旋(Wrench)，可以在任意参考坐标系下合成。根据图 5.14 可知，$\boldsymbol{f},\boldsymbol{c}$ 方向平行，可以写为

$$\boldsymbol{c}=h\boldsymbol{f}$$

式中，h 为带符号的标量。与运动螺旋类似，$\boldsymbol{w}_O$ 的组成也可以这样描述，包含一个沿 $\boldsymbol{s}_A$ 方向滑动的力矢量伴随一个标量 h。

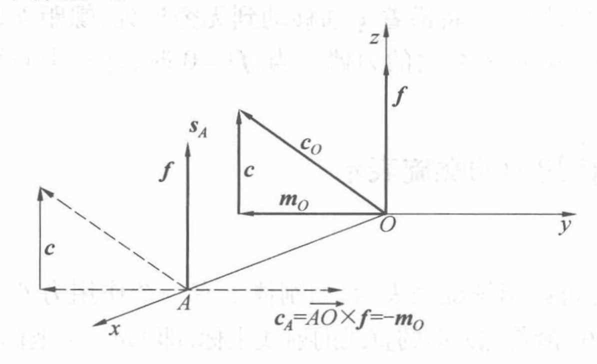


图 5.14 潘索中心轴原理示意图

如果给定 O 点处的力螺旋 $\boldsymbol{w}_O=[\boldsymbol{f} \quad \boldsymbol{c}_O]^{\mathrm{T}}$，可以求得螺距 h 和作用线 $\boldsymbol{s}_A$ 与 O 点的相对位置。令 $c=h|\boldsymbol{f}|$，c 是 $\boldsymbol{c}_O$ 在 $\boldsymbol{f}$ 所定义的单位方向的投影，写为

$$c=\boldsymbol{c}_O^{\mathrm{T}}\frac{\boldsymbol{f}}{|\boldsymbol{f}|}$$

进一步得

$$h|\boldsymbol{f}|=\boldsymbol{c}_O^{\mathrm{T}}\frac{\boldsymbol{f}}{|\boldsymbol{f}|}$$

$$h=\frac{\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{c}_O}{|\boldsymbol{f}|^2} \tag{5.40}$$

因此，已知 h，可以得到 $\boldsymbol{c}=h\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{m}_O=\boldsymbol{c}_O-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{w}_O$ 可以分解为

$$\boldsymbol{w}_O=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{c}_O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{m}_O\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{c}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ h\boldsymbol{f}\end{bmatrix} \tag{5.41}$$

式中，$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OA}$。由 $\boldsymbol{m}_O=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}$ 可知，点 O 到 A 的距离为

$$r=\frac{|\boldsymbol{m}_O|}{|\boldsymbol{f}|} \tag{5.42}$$

$\boldsymbol{r}$ 的单位矢量为

$$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{m}_O}{|\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{m}_O|} \tag{5.43}$$

则

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{u}=\frac{|\boldsymbol{m}_O|(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{m}_O)}{|\boldsymbol{f}|\quad|\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{m}_O|} \tag{5.44}$$

显然，$|\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{m}_O|=|\boldsymbol{f}||\boldsymbol{m}_O|$，并且 $\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{m}_O=\boldsymbol{f}\times(\boldsymbol{c}_O-h\boldsymbol{f})$，因此

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{c}_O}{|\boldsymbol{f}|^2} \tag{5.45}$$

当 $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{c}_O=0$，且 $|\boldsymbol{f}|\neq0$ 时，作用于刚体的力系是纯力，因为此时 $h=0$，即 $\boldsymbol{c}=0$，进一步简化力系 $\{\boldsymbol{f},\boldsymbol{c}_O\}$ 到中心轴，仅获得一个力矢量 $\boldsymbol{f}$ 而无关联的力偶。此时 $\boldsymbol{c}_O$ 垂直于 $\boldsymbol{f}$，有 $\boldsymbol{m}_O=\boldsymbol{c}_O$。

当 $|\boldsymbol{f}|=0$ 时，力螺旋的形式为 $\boldsymbol{w}_O=[\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{c}_O]^{\mathrm{T}}$，是一个纯力偶，从图 5.14 可以看出，如果 $|\boldsymbol{f}|\to0$ 而保持 $\boldsymbol{c}_O$ 为常量，则点 A 将沿着 x 轴移动到无穷远处，螺距 h 趋向无穷。从这个意义来讲，纯力偶就是一个螺距无穷大的力偶。当 $|\boldsymbol{f}|=0$ 时，计算中心轴位置及方向没有意义。

5.7.2 刚体上作用力的螺旋表示

1. 刚体上的力

刚体上的作用力也可以用螺旋来表示，如刚体上有一个作用力 $\boldsymbol{f}$，如图 5.12 所示，其大小为 f，方向为 $\boldsymbol{s}$，则 $\boldsymbol{f}=f\boldsymbol{s}$，沿着此方向的直线的射线坐标，即 Plücker 坐标可表示为 $[\boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{r}$ 表示在参考坐标系下直线上一点的位置矢量。此力对坐标原点的力矩为 $\boldsymbol{c}_O=\boldsymbol{r}\times f\boldsymbol{s}=f(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})$，在 O 点刚体的力螺旋可以表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{c}_O \end{bmatrix} = f\begin{bmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s} \end{bmatrix}$$

2. 刚体上的力偶

作用在刚体上两个大小相等、方向相反的力，两个力构成一个力偶，如图 5.15 所示，与坐标系原点的位置无关，是空间自由矢量，可以表示为

$$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\times f\boldsymbol{s} = f|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|\left(\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}\times\boldsymbol{s}\right)$$

此力偶的大小为 $c = f|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$，方向为 $\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}\times\boldsymbol{s}$，其在空间的任意平动不会引起刚体状态的改变，则力偶可以表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{s} \end{bmatrix}$$

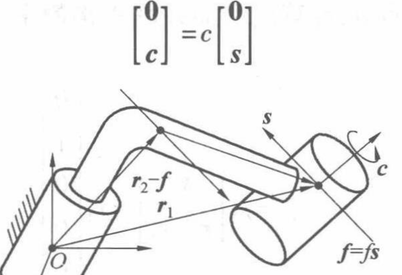


图 5.15　刚体上力偶螺旋表示

5.7.3　反螺旋的物理意义

一个刚体被一个转动副约束，转动副轴线的线矢量用 $\boldsymbol{S}_1 = (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_{01})$ 表示，刚体的运动可以表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v}_0 \end{bmatrix} = \dot{\theta}\boldsymbol{S}_1 = \dot{\theta}\begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_1 \\ \boldsymbol{s}_{01} \end{bmatrix}$$

式中，$\dot{\theta}$ 是转动的角速率；$\boldsymbol{\omega}$ 是转动的角速度；$\boldsymbol{v}_0$ 是与原点重合点的线速度。设刚体上还作用了节距为零的力螺旋，表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{c}_0 \end{bmatrix} = f\boldsymbol{S}_2 = f\begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_2 \\ \boldsymbol{s}_{02} \end{bmatrix}$$

此力螺旋对刚体所做的瞬时功率为

$$p = \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{c}_0\cdot\boldsymbol{\omega}$$

根据式(5.37)，两个螺旋的互易积可以表示为

$$f\boldsymbol{S}_2 \circ \dot{\theta}\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{c}_0\cdot\boldsymbol{\omega}$$

从上式可以看出，$f\boldsymbol{S}_2$，$\dot{\theta}\boldsymbol{S}_1$ 两个螺旋的互易积表示力对刚体瞬时所做的功，如果此互易积的值为零，即

$$f\boldsymbol{S}_2 \circ \dot{\theta}\boldsymbol{S}_1 = 0$$

表示力螺旋对做螺旋运动的刚体瞬时所做的功率为零。此时，无论 f 多大，都不影响瞬时刚

体的螺旋运动,为刚体螺旋运动的理想力约束。

【例 5.1】 图 5.16 所示平面并联机构,动平台通过三条 RPR 运动链并行连接于基座,移动关节为驱动关节,动平台有三个自由度。移动关节通过转动关节连接动平台与定平台。假设三个驱动关节作用力的大小为 f_1,f_2 和 f_3,在参考坐标系下 Oxy 下,作用线的线矢量为 $\boldsymbol{S}_1$,$\boldsymbol{S}_2$ 和 $\boldsymbol{S}_3$,则在 O 的力螺旋为

$$\boldsymbol{w}_O=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{c}_O\end{bmatrix}=f_1\boldsymbol{S}_1+f_2\boldsymbol{S}_2+f_3\boldsymbol{S}_3$$

进一步写为

$$\boldsymbol{w}_O=f_1\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}_1\\ \boldsymbol{s}_{01}\end{bmatrix}+f_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}_2\\ \boldsymbol{s}_{02}\end{bmatrix}+f_3\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}_3\\ \boldsymbol{s}_{03}\end{bmatrix}$$

一个 f_A 的垂直力作用于点 A,计算出平面并联机构静平衡时的驱动力 f_1,f_2 和 f_3,此力在 O 点的力螺旋为

$$\boldsymbol{w}_{\text{external}}=f_A\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}_A\\ \boldsymbol{r}_A\times\boldsymbol{s}_A\end{bmatrix}=f_A\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{w}_O=\boldsymbol{w}_{\text{external}}$,可以计算得到 f_1,f_2 和 f_3。

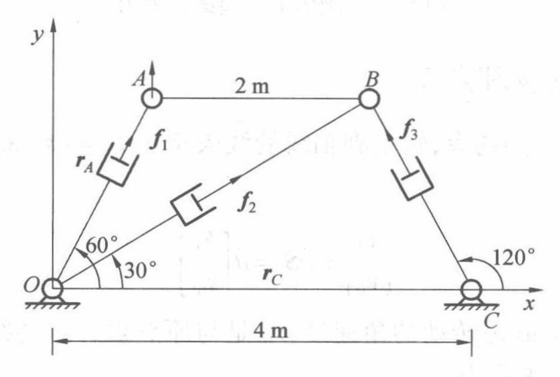


图 5.16 平面三自由度并联机构

【例 5.2】 空间 2R 机械臂包含两个转动关节,关节 1 驱动刚体在水平面转动,关节 2 垂直于关节 1,两杆杆长分别为 a_1,a_2,关节变量为 θ_1,θ_2,试分析在坐标系{1}下,机构的自由度数与运动方向。在基坐标系{1}原点处,关节 1 和关节 2 的运动螺旋为

$$\boldsymbol{t}_1=\dot{\theta}_1\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}_1\\ \boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{s}_1\end{bmatrix}=\dot{\theta}_1\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{t}_2=\dot{\theta}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}_2\\ \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{s}_2\end{bmatrix}=\dot{\theta}_2\begin{bmatrix}s_1\\-c_1\\0\\0\\0\\-a_1\end{bmatrix}$$

刚体 G 在 O_1 点的运动螺旋 $\boldsymbol{t}$ 为

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}_1+\boldsymbol{t}_2=\dot{\theta}_1\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\dot{\theta}_2\begin{bmatrix}s_1\\-c_1\\0\\0\\0\\-a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\theta}_2 s_1\\-\dot{\theta}_2 c_1\\\dot{\theta}_1\\0\\0\\-\dot{\theta}_2 a_1\end{bmatrix}$$

螺距及螺旋轴线的位置为

$$h=\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}}=\frac{-a_1\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1{}^2+\dot{\theta}_2{}^2}$$

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}}=\frac{1}{\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2}\left[a_1\dot{\theta}_2{}^2c_1\quad a_1\dot{\theta}_2{}^2s_1\quad 0\right]^{\mathrm{T}}$$

在笛卡儿基坐标系{1}下，构造一个螺旋为 $\boldsymbol{\$}$，令运动螺旋 $\boldsymbol{t}$ 和所构造的螺旋 $\boldsymbol{\$}$ 的互易积为零，即 $\boldsymbol{\$}\circ\boldsymbol{t}=0$，$\boldsymbol{\$}$ 为运动螺旋 $\boldsymbol{t}$ 的逆螺旋，则在瞬时，螺旋 $\boldsymbol{\$}$ 为

$$\boldsymbol{\$}=\begin{bmatrix}s_1\\s_2\\0\\-\dot{\theta}_2 c_1\\\dot{\theta}_2 s_1\\0\end{bmatrix}\tag{5.46}$$

形式时互易积为零。式(5.46)表明，在基坐标系{1}下，沿 x 轴、y 轴，绕 x 轴、y 轴存在理想的力约束，只有沿 z 轴，绕 z 轴力做功不为零，即沿、绕 z 方向存在运动自由度，因此对于图5.17所示的开链空间机构，其自由度为2，即沿 z 轴平移和绕 z 轴转动。

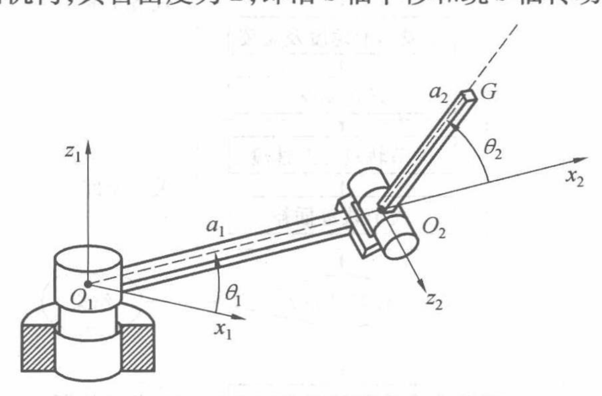


图5.17　空间2R机械臂自由度分析

本章小结

在多关节串并联机构中，螺旋轴的几何意义明确，为关节轴线的规范Plücker坐标，包含了此关节轴线的方向及位置，螺旋系中各螺旋相关性的判断，是螺旋理论在机构研究应用中的基本问题。本章通过探索一般刚体瞬时运动螺旋和瞬时力螺旋描述的来龙去脉，明确其中蕴含的物理意义，来引导读者用螺旋理论分析机构。

第6章　关节轨迹规划

轨迹规划的主要目的是为运动控制系统产生期望的输入，以确保机械臂按照规划的轨迹运动。机械臂的操纵者指定一定数量的参数来描述期望的轨迹，并通过插补的方法把期望的轨迹按照时间序列离散成一系列的值。本章首先研究点到点的运动，然后研究多点运动，机械臂的运动涉及两个空间，即关节空间和任务空间。机械臂末端的运动是关节运动的映射，在关节空间的轨迹规划将降低规划的难度和控制的难度。

对机械臂最低的要求是能从初始位姿移动到给定的终止位姿，其中间过程要求执行器输出广义力矩，但不违背执行器固有的物理参数，如执行器输出力矩、速度及加速度等，同时要防止出现机械臂结构的共振现象。在某些机械臂中，驱动关节加速度的变化，会引起振动现象，经常发生在启动与结束过程中。因此有必要设计轨迹规划算法以产生平滑的运动轨迹。通常末端任务路径规划以后，需要在任务空间和关节空间进行轨迹规划。图6.1所示为两空间轨迹规划逻辑关系图。

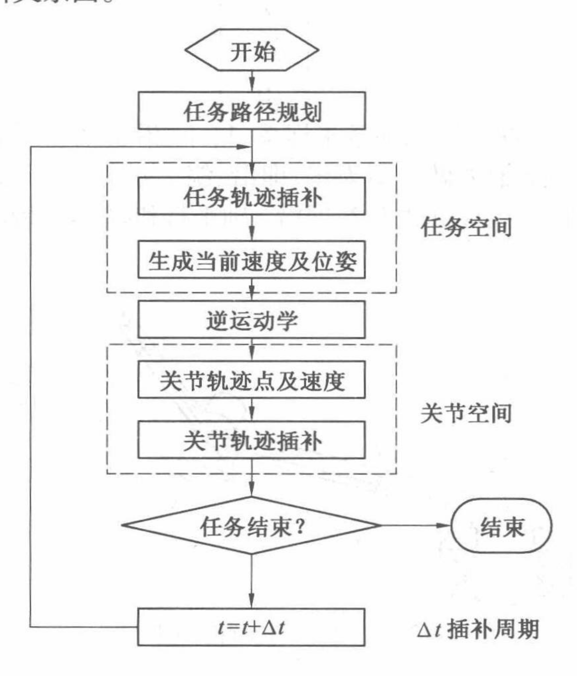


图6.1　两个空间轨迹规划逻辑关系图

机器人路径（Path）规划和轨迹（Trajectory）规划是容易引起混淆的两个术语，一般对工业机器人而言，路径规划表示在给定机械臂末端初始位姿和目标位姿，在无碰撞、结构无奇异等约束条件下，按照某一性能指标（如距离、时间、能量等）搜索一条最优或者次优的路径。轨迹规划是对于所规划的路径上各点的位姿、速度和加速度给出一组显式约束（如连续性和光滑程度等），从一类包含时间变量的函数中（如多项式等）选取参数化轨迹，对各点

进行插值并满足约束条件。

6.1 三次多项式规划

在任务空间中，规划机器人末端的路径是直观并且易于理解的，例如，面向具体的任务规划其初始位姿、目标位姿及路径上一系列过点，并且给定完成此路径的时间，但在任务空间实现期望控制轨迹是困难的，通常需要在关节空间控制各关节的运动，那么相应的轨迹规划也在关节空间进行，任务空间所规划的路径各点通过逆运动学映射到关节空间，由于任务空间与关节空间转化关系的复杂性，对末端路径上各点有条件要求，而对各点之间路径无要求的任务，才能在关节空间直接规划。本书只研究在关节空间中的轨迹规划，首先讨论点对点的运动。在点对点的运动中，机械臂某关节从初始关节位置 q_0 运动到结束关节位置 q_f，时间跨度为 t_f。可以想象出，如果没有约束条件和性能指标的要求，在要求时间 t_f 内，存在无数多条平滑曲线满足要求。如果把平滑曲线以函数 $q(t)$ 表示，一般而言，对于开始和结束位置，需要满足四个约束条件，即

$$\begin{aligned} q(t_0)=q_0,\dot{q}(t_0)=v_0 \\ q(t_f)=q_f,\dot{q}(t_f)=v_f \end{aligned} \tag{6.1}$$

式中，v_0，v_f 分别为开始与结束点的速度。即使给出约束条件，符合此约束条件的平滑曲线也是数量众多，因此在这里提出能量最小为此轨迹的性能指标，假定此单关节的转动惯量为 I，在执行器输出力矩 τ 的作用下，从 q_0 运动到 q_f，单杆的动力学方程为

$$I\alpha=\tau$$

式中，$\alpha=\ddot{q}(t)$，需要满足的约束条件为

$$\int_0^{t_f}\dot{q}(t)\,\mathrm{d}t=q_f-q_0$$

能量最小性能指标可以表示为

$$\min\int_0^{t_f}\tau^2(t)\,\mathrm{d}t$$

经过推导，当需要的能量最小时，$\dot{q}(t)$ 必须满足曲线

$$\dot{q}(t)=at^2+bt+c \tag{6.2}$$

当关节速度符合式(6.2)时，驱动关节完成此段轨迹所需要的能量最小，同时从式(6.1)也可以看出，此段轨迹需要同时满足四个约束条件，如果采用多项式为轨迹规划的函数至少也要为三次多项式，所以从两方面来看，三次多项式规划关节的轨迹是合理的选择。为了规划关节的轨迹，可以选择的三次多项式为

$$q(t)=a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0 \tag{6.3}$$

沿该轨迹的关节速度、加速度表示为

$$\dot{q}(t)=3a_3t^2+2a_2t+a_1 \tag{6.4}$$

$$\ddot{q}(t)=6a_3t+2a_2 \tag{6.5}$$

将四个约束条件代入式(6.3)、(6.4)，得

$$q_0=a_3t_0^3+a_2t_0^2+a_1t_0+a_0$$

$$\dot{q}_0=3a_3t_0^2+2a_2t_0+a_1$$

$$q_f = a_3 t_f^3 + a_2 t_f^2 + a_1 t_f + a_f$$

$$\dot{q}_f = 3a_3 t_f^2 + 2a_2 t_f + a_1$$

上面四个公式写为矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \\ q_f \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

【例 6.1】 单杆转动关节机器人,在 1 s 内由起始点 $q(0)=20°$开始运动到终点$q(1)=-10°$,且起始与终止速度均为零,运用三次多项式规划该机器人关节运动轨迹,假定插补周期为 2 ms,画出关节位置、速度与加速度的变化曲线。把上述约束条件代入式(6.6),得出矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ 0 \\ q_f \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得

$$a_0 = q_0, a_1 = 0, a_2 = 3(q_f - q_0), a_3 = -2(q_f - q_0)$$

所得到的三次多项式的函数为

$$q(t) = q_0 + 3(q_f - q_0)t^2 - 2(q_f - q_0)t^3, t \in [0 \quad 1]$$

依据此函数,以时间间隔为 2 ms 规划得出的关节位置、速度和加速度随时间变化的曲线如图 6.2 所示。

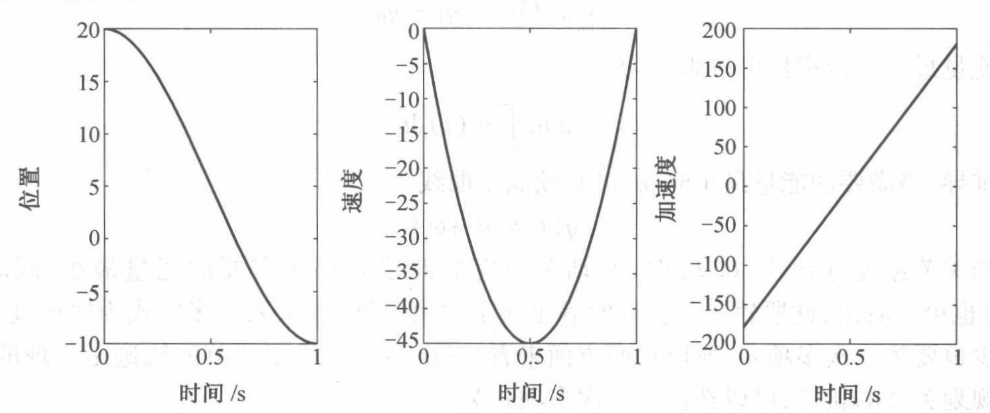


图 6.2 三次多项式规划的位置、速度和加速度

6.2 直线与抛物线混合规划

在工业机器人实际应用中,经常采纳直线与抛物线混合的轨迹规划方法,此方法的优势在于,可以直观发现所规划轨迹的速度和加速度是否在机器人物理参数约束条件范围内,在这种方法中,速度曲线为梯形曲线,在关节运动过程中,开始以固定值加速度加速运动,然后

以匀速运动，最后以固定值加速度减速运动到达目标点。其位置曲线包含直线段，两端通过抛物线连接到开始点和结束点，如图 6.3 所示。

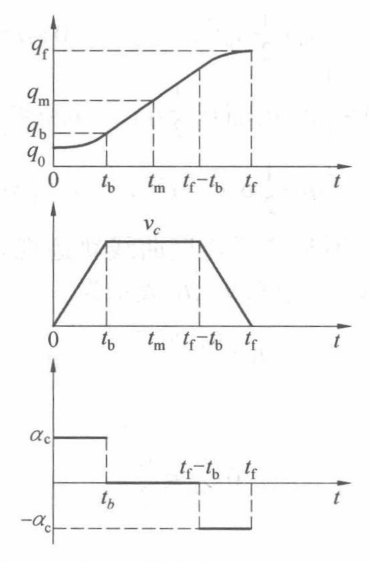


图 6.3　直线和抛物线混合位置、速度与加速度特征线

本书所给的轨迹规划起点与终点的运动，给定延续时间作为约束条件，而在工业机器人实际应用中，用户往往给定最大容许速度的百分比，这是因为如果给定延续时间过短，规划的速度与加速度过大，可能超出机器人的能力范围。从图 6.3 中可以看出，此种轨迹规划方法开始与结束速度、加速度为零，开始与结束轨迹段中加减速过程有相同的时间延续，即加速、减速过程的加速度大小相等。匀速运动的最大速度给定为 v_c，加减速大小给定为 α_c。假定开始时间为 $t_0=0$，结束时间为 t_f，直线与抛物线开始混合的时间为 t_b。从图 6.3 中也可以看出，其位置轨迹曲线在 $t_m=t_f/2$ 处，轨迹点位置为 $q_m=(q_f+q_0)/2$。当给定 q_0,q_f,t_f 时，首先研究轨迹规划所给定的加速度必须满足的约束条件，以确保给定延续时间 t_f 下，恰好从开始点 q_0 运动到 q_f，首先在 t_b 时刻混合时，其速度必须满足的条件为

$$\alpha_c t_b=\frac{q_m-q_b}{t_m-t_b} \tag{6.7}$$

式中，q_b 表示在混合时间 t_b 时，以常量加速度 α_c 加速运动到的位置点，可以表达为

$$q_b=q_0+\frac{1}{2}\alpha_c t_b^2 \tag{6.8}$$

根据式(6.7)和式(6.8)，并且知道 $t_m=t_f/2$，可以得出

$$\alpha_c t_b^2-\alpha_c t_f t_b+q_f-q_0=0 \tag{6.9}$$

当给定 q_0,q_f,t_f,α_c 时，并且要符合 $t_b\leqslant t_f/2$ 条件，t_b 求解得

$$t_b=\frac{t_f}{2}-\sqrt{\frac{t_f^2}{4}-\frac{4(q_f-q_0)}{\alpha_c}} \tag{6.10}$$

显然，从式(6.10)可以看出，α_c 的正负号 $\mathrm{sgn}(\alpha_c)$ 要与 $\mathrm{sgn}(q_f-q_0)$ 一致，并且给定的加速度要符合以下约束条件：

$$\frac{t_f^2}{4}-\frac{4(q_f-q_0)}{\alpha_c}\geqslant 0，即\ |\alpha_c|\geqslant\frac{4|q_f-q_0|}{t_f^2} \tag{6.11}$$

当给定的加速度的大小满足式(6.11)的等式时,在此轨迹中仅有加速、减速阶段,无匀速阶段。直线和抛物线混合的轨迹线可以表示为

$$q(t)=\begin{cases} q_0+\dfrac{1}{2}\alpha_c t^2, & 0\leqslant t\leqslant t_b \\ q_0+\alpha_c t_b\left(t-\dfrac{1}{2}t_b\right), & t_b<t\leqslant t_f-t_b \\ q_f-\dfrac{1}{2}\alpha_c(t_f-t)^2, & t_f-t_b<t\leqslant t_f \end{cases} \tag{6.12}$$

确定轨迹加速度约束条件,不是梯形速度曲线轨迹规划的唯一方式,当给定 q_0, q_f, t_f 时,根据式(6.7)可知 $v_c=\alpha_c t_b$,代入式(6.9),t_b 表示为

$$t_b=\frac{q_0-q_f+v_c t_f}{v_c} \tag{6.13}$$

必须满足的约束条件为

$$0<t_b\leqslant\frac{t_f}{2}$$

即

$$\frac{|q_f-q_0|}{t_f}\leqslant|v_c|\leqslant\frac{2|q_f-q_0|}{t_f} \tag{6.14}$$

因而,当给定匀速运动速度 v_c 时,常量加速度为

$$\alpha_c=\frac{v_c^2}{q_0-q_f+v_c t_f} \tag{6.15}$$

通过式(6.14)、(6.15)计算得到 t_b, α_c,而后可以通过式(6.12)随时间变化产生一系列的插补点。

6.3 多点的三次多项式规划

在许多应用场合,为了避开运动过程中的障碍物或者使实际运动轨迹更符合期望轨迹,机器人的路径需要通过许多点来描述,如图 6.4 所示。如果机器人路径规划所得出的点为 $n+1$ 个,并且规划好过每个点的时间,如果所有的点有 $n+1$ 个约束条件,则至少需要 n 次多项式才能满足 $n+1$ 个约束条件,但是会产生以下问题:①对每个点处的速度分配困难;②多项式阶次越高,曲线特性越可能振荡;③多项式系数的解随着阶次提高精度变差,甚至无法求解;④多项式系数求解以后,如果更改路径中的点,需要重新计算。

为了克服上述缺点,插补所采用的多项式为低阶次的多项式,对于 $n+1$ 个点,关节轨迹规划的多项式函数 $q(t)$,可用 n 个三次多项式函数 $l_k(t)$(其中 $k=0,1,2,\cdots,n-1$)组合而成,函数 $q(t)$ 在 $t=t_k$ 时刻到达各个点 q_k,并且满足终止条件,$t_n=t_f$,$q(t_f)=q_f$。首先研究存在速度约束的插补多项式,此种方法要求用户指定每个过点的速度,与两个点的三次多项式轨迹规划没有区别,所规划路径中每两个规划点的三次多项式插补函数需要满足如下约束条件:

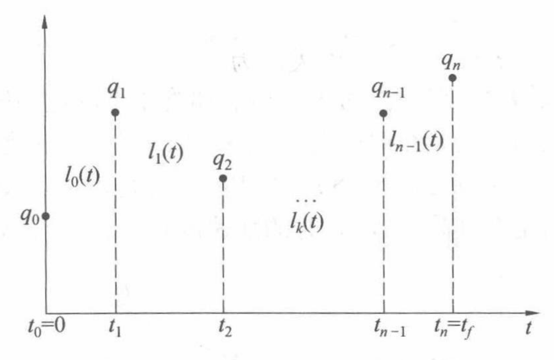


图 6.4　多点三次多项式轨迹插补

$$\left.\begin{aligned} l_k(t_k) &= q_k \\ l_k(t_{k+1}) &= q_{k+1} \\ \dot{l}_k(t_k) &= \dot{q}_k \\ \dot{l}_k(t_{k+1}) &= \dot{q}_{k+1} \end{aligned}\right., k=0,1,2,\cdots,n-1 \tag{6.16}$$

存在 $n+1$ 点，有 n 组如式(6.16)所示的三次多项式函数的四个未知系数需要求解，一般的，开始与终止的速度设置为零，即 $\dot{q}_0=\dot{q}_n=0$，同时为了满足速度连续的约束条件，两个相邻的多项式函数要满足以下约束条件：

$$\dot{l}_k(t_{k+1})=\dot{l}_{k+1}(t_{k+1}), k=0,1,2,\cdots,n-2$$

为每个过点分配速度不是一件容易的事情，尤其过点数量较多时，一种方式是在每个点处为速度设定一个规则，可以设定为

$$\begin{aligned} &\dot{q}_1=0 \\ &\dot{q}_k=\begin{cases} 0, & \operatorname{sgn}(v_k)\neq\operatorname{sgn}(v_{k+1}) \\ \dfrac{1}{2}(v_k+v_{k+1}), & \operatorname{sgn}(v_k)=\operatorname{sgn}(v_{k+1}) \end{cases}, k=1,2,\cdots,n-1 \\ &\dot{q}_n=0 \end{aligned} \tag{6.17}$$

式中，$v_k=(q_k-q_{k-1})/(t_k-t_{k-1})$ 为两点线段相对于时间的斜率，其物理意义为 $[t_{k-1}\quad t_k]$ 间隔内匀速度运动。

6.4　多点直线与抛物线混合规划

当已经规划好关节空间内 $n+1$ 个径点 $q_0,q_1,\cdots,q_n$，并且给定经过各个点的时间 t_0，$t_1,\cdots,t_n$，轨迹规划采用直线插补方式，为了避免在时间 t_k 时，即速度不连续问题，在两条直线段之间采用抛物线平滑过渡的方式，关节轨迹函数 $q(t)$ 在时间 t_k 附近平滑过渡，所规划的轨迹包含了直线段和二次多项式，但加速度不一定连续。如图 6.5 所示，令 $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$，$\Delta t_{k,k+1}$ 为从 q_k 到 q_{k+1} 轨迹插补中直线插补段的时间延续，令 $\dot{q}_{k,k+1}$ 为从 q_k 到 q_{k+1} 匀速度，并且 $\ddot{q}_k$ 为抛物线平滑过渡时间 Δt_{sk} 延续内的加速度。与单段路径直线与抛物线混合规划一样，此种方法中值 $q_k,\Delta t_k,\Delta t_{sk}$ 需要路径规划时给定，各中间点的速度和加速度为

$$\dot{q}_{k-1,k}=\frac{q_k-q_{k-1}}{\Delta t_{k-1}} \tag{6.18}$$

$$\ddot{q}_k=\frac{\dot{q}_{k,k+1}-\dot{q}_{k-1,k}}{\Delta t_{sk}},k=0,1,2,\cdots,n \tag{6.19}$$

对开始和结束线段需要特别注意，考虑起始点和终止点的抛物线过渡时间，如图6.5所示，应该全部计入轨迹规划总的延续时间为 $t_n-t_0+0.5(t_{s0}+t_{sn})$，速度约束为 $\dot{q}_{-1,0}=\dot{q}_{n,n+1}=0$。当 $q_k,\Delta t_k,\Delta t_{sk}$ 给定时，$\dot{q}_{k-1,k},\ddot{q}_k$ 由式(6.18)、(6.19)计算得出。如图6.5所示，$q(t)$ 不一定通过所规划的路径点，而是在其附近，混合时的加速度越大，越接近规划的路径点。

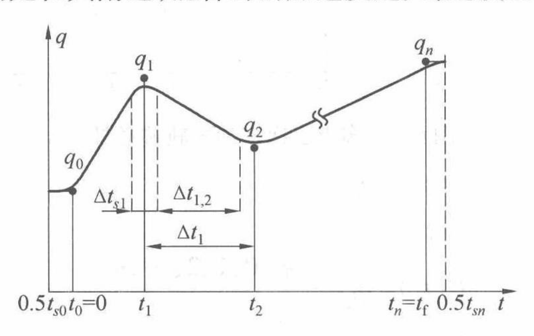


图6.5　多点直线与抛物线混合规划

【例6.2】　单杆旋转关节机器人，由初始位置 $q_0=0$，途经 $q_1=30°$，$q_2=20°$，到达终点 $q_3=5°$，时间 $t_0=0$，$t_1=2$，$t_2=3$，$t_3=4$，初始结束速度为 $\dot{q}_0=0$，$\dot{q}_3=0$，各线段混合的时间为0.2 s，求混合时的加速度。

总延续时间为 $t_n-t_0+0.5(t_{s0}+t_{sn})=4.2$，初始，中间各线段及结束速度分别为

$$\dot{q}_{-1,0}=0,\dot{q}_{0,1}=\frac{q_1-q_0}{2}=15\ (°)/\text{s},\dot{q}_{1,2}=\frac{q_2-q_1}{1}=-10\ (°)/\text{s},\dot{q}_{2,3}=\frac{q_3-q_2}{1}=-5\ (°)/\text{s},\dot{q}_{3,4}=0$$

混合时间为0.2 s，混合时的加速度为

$$\ddot{q}_0=\frac{\dot{q}_{0,1}-\dot{q}_{-1,0}}{0.2}=75\ (°)/\text{s},\ddot{q}_1=\frac{\dot{q}_{1,2}-\dot{q}_{0,1}}{0.2}=-125\ (°)/\text{s}$$

$$\ddot{q}_2=\frac{\dot{q}_{2,3}-\dot{q}_{1,2}}{0.2}=25\ (°)/\text{s},\ddot{q}_3=\frac{\dot{q}_{3,4}-\dot{q}_{2,3}}{0.2}=25\ (°)/\text{s}$$

本章小结

本章主要研究了关节轨迹规划的问题，涉及三次多项式规划、直线与抛物线混合轨迹规划，以及多点的三次多项式和直线与抛物线混合轨迹规划时中间点速度与加速度分配的问题，所研究的方法在实际工程中有较强的应用性，同时为深入研究其他关节空间内的轨迹规划方法奠定了良好的基础。

第7章 机器人动力学

机器人动力学方程或运动方程(Equation of Motion),是研究当作用于关节上驱动力或力矩时,机器人的运动状态。所推导的动力学方程或所建立的动力学模型描述了机器人动态行为,在以下几个方面有重要的作用:

(1)动力学模型用于开发适合的控制策略,一些控制方案直接依赖于动力学模型,为了实现在驱动力或者力矩作用下期望的运动轨迹。

(2)动力学模型用于机器人系统计算机仿真,通过模拟在不同条件下的模型行为特性,预测机器人系统搭建完成后的行为。

(3)给定机器人关节驱动力和力矩,可以动态分析机器人系统最优的杆件的尺寸形状、轴承承载力等相关参数。

机器人动力学分为逆动力学和正动力学两方面。逆动力学是分析机器人沿期望轨迹运动所需要的关节驱动力或力矩,其方程用于机器人运动控制。正动力学是当作用于关节驱动力或者力矩给定时,机器人系统的响应(一般包括位置、速度及加速度),主要用于系统的计算机仿真。机器人系统的动力学建模有众多方法,包括牛顿-欧拉法、拉格朗日法、凯恩方程等,为了便于理解作用于机械臂各杆件的作用力,首先从研究机器人静力学开始。

7.1 静力学

工业机器人在装配生产线应用时,其末端要与外部环境接触,类似的场合还包括灵巧手抓取以及行走机器人腿都要和周围环境接触,所有这些场合都需要控制机器人末端和环境之间的接触力。本节首先讨论机器人在静态时末端作用于外部环境的力和力矩及各关节驱动力之间的关系。

7.1.1 单个杆件静力学

首先考虑在开链工业机器人机构中单个杆件 i(不为基座和末端杆),通过关节 i 和 $i+1$ 连接杆 $i-1$ 和杆 $i+1$。图7.1所示为作用在杆件 i 上的力和力矩,O_i 是坐标系 F_i 的原点,此坐标系固连于杆 $i-1$,位于关节 i。杆 i 前后两端受到相邻杆通过关节作用的力和力矩。$\boldsymbol{f}_{i-1,i}$是三维矢量,表示杆 $i-1$ 作用于杆 i 的力,$\boldsymbol{f}_{i,i+1}$表示杆 i 作用于杆 $i+1$ 的力,则杆 $i+1$ 反作用于杆 i 的力为$-\boldsymbol{f}_{i,i+1}$。$\boldsymbol{n}_{i-1,i}$是三维矢量,表示杆 $i-1$ 作用于杆 i 的力矩,$\boldsymbol{n}_{i,i+1}$表示杆 i 作用于杆 $i+1$ 的力矩,则杆 $i+1$ 反作用于杆 i 的力矩为$-\boldsymbol{n}_{i,i+1}$。力$\boldsymbol{f}_{i-1,i}$和力矩 $\boldsymbol{n}_{i-1,i}$称为杆 $i-1$ 和杆 i 间关节力和力矩。杆 i 的重力位于质心表示为 $m_i\boldsymbol{g}$,m_i 表示杆 i 的质量,$\boldsymbol{g}$ 是三维矢量,表示重力加速度。

在惯性坐标系下,杆 i 静力平衡方程为

$$\boldsymbol{f}_{i-1,i}-\boldsymbol{f}_{i,i+1}+m_i\boldsymbol{g}=\boldsymbol{0},i=1,\cdots,n \tag{7.1}$$

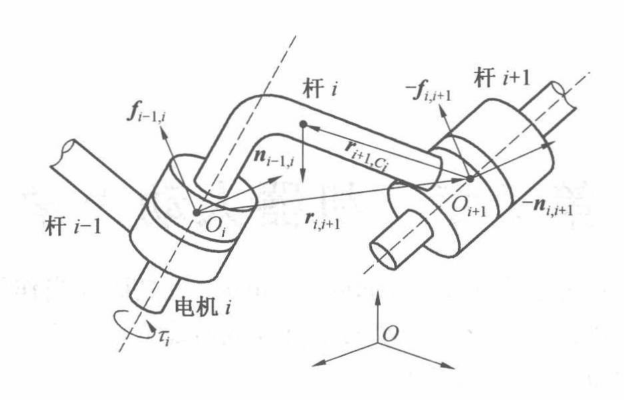


图 7.1 单杆静态时受力示意图

相对于质心点 C_i，其静力矩平衡方程为

$$\boldsymbol{n}_{i-1,i}-\boldsymbol{n}_{i,i+1}-(\boldsymbol{r}_{i,i+1}+\boldsymbol{r}_{i+1,C_i})\times\boldsymbol{f}_{i-1,i}+(-\boldsymbol{r}_{i+1,C_i})\times(-\boldsymbol{f}_{i,i+1})=\boldsymbol{0},\ i=1,\cdots,n \tag{7.2}$$

式中，$\boldsymbol{r}_{i,i+1}$是位置矢量，在基坐标系下从点 O_i 指向点 O_{i+1}，$\boldsymbol{r}_{i+1,C_i}$表示从点 O_{i+1}指向杆 i 的质心点 C_i。关节力和力矩为$\boldsymbol{f}_{0,1}$和 $\boldsymbol{n}_{0,1}$，表示基座，即杆 0 和杆 1 之间的关节力和力矩，如图 7.2(a)所示。关节力和力矩为$\boldsymbol{f}_{n,n+1}$和 $\boldsymbol{n}_{n,n+1}$，表示末端杆，即杆 n 和外部环境之间的作用力和力矩，如图 7.2(b)所示。当机器人末端接触环境时，作用于末端的反作用力为$-\boldsymbol{f}_{n,n+1}$和$-\boldsymbol{n}_{n,n+1}$。

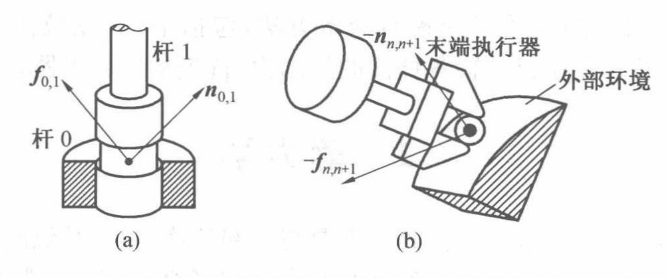


图 7.2 杆 1 和杆 n 受基座和外部环境的力

如果机器人机构包括 n+1 个杆件(包括基座)，可以列出 2n 个瞬时矢量方程，但方程中包括 2(n+1)个未知矢量。因此，为了求解方程中关节力和力矩，必须给定一组关节力和力矩，否则方程无法求解。力 $\boldsymbol{f}_{n,n+1}$和力矩 $\boldsymbol{n}_{n,n+1}$是在机器人任务中指定作用于外部环境的力和力矩，因此给定此对力和力矩后，可以求解以上瞬时方程。为了方便起见，把力和力矩定写成力螺旋的形式为

$$\boldsymbol{w}_{i-1,i}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{f}_{i-1,i}\\\boldsymbol{n}_{i-1,i}\end{pmatrix},i=1,\cdots,n$$

式(7.1)和式(7.2)可以写为矩阵的形式为

$$
\begin{bmatrix}
E & 0 & -E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
S(-(r_{0,1}+r_{1,C_i})) & E & S(r_{1,C_i}) & -E & \cdots & 0 & 0 \\
 & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & E & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & S(-(r_{n,n+1}+r_{n+1,C_n})) & E
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
f_{0,1} \\ n_{0,1} \\ f_{1,2} \\ n_{1,2} \\ \vdots \\ f_{n-1,n} \\ n_{n-1,n}
\end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
-m_1 g \\ 0 \\ -m_2 g \\ 0 \\ \vdots \\ f_{n,n+1}-m_n g \\ n_{n,n+1}+r_{n+1,C_i}\times f_{n,n+1}
\end{bmatrix}
\tag{7.3}
$$

式中，$E\in\mathbf{R}^{3\times3}$表示单位矩阵，$S(v)$表示矢量$v$构造的斜对称矩阵。

7.1.2 递归法计算关节力

为了方便求解关节力和力矩，式(7.1)和式(7.2)写成递归的形式为

$$
\begin{aligned}
&f_{i-1,i}=f_{i,i+1}-m_i g \\
&n_{i-1,i}=n_{i,i+1}+(r_{i,i+1}+r_{i+1,C_i})\times f_{i-1,i}-r_{i+1,C_i}\times f_{i,i+1},\ i=1,\cdots,n
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

矢量方程(7.4)在任何参考坐标系下都成立。为了计算方便，矢量$r_{i,i+1}$，r_{i+1,C_i}经常表示在坐标系$\{i+1\}$下，此坐标系与杆i后端固连，此时$[r_{i,i+1}]_{i+1}$，$[r_{i+1,ci}]_{i+1}$为常量。在这里$[r]_i$书写方式表示r矢量以坐标系F_i为参考。第i杆的静力平衡方程(7.4)在坐标系$\{i+1\}$下写为

$$
\begin{aligned}
&[f_{i-1,i}]_{i+1}=[f_{i,i+1}-m_i g]_{i+1} \\
&[n_{i-1,i}]_{i+1}=[n_{i,i+1}+(r_{i,i+1}+r_{i+1,C_i})\times f_{i-1,i}-r_{i+1,C_i}\times f_{i,i+1}]_{i+1},\ i=n,\cdots,1
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

在坐标系$\{i+1\}$下求得$[f_{i-1,i}]_{i+1}$，$[n_{i-1,i}]_{i+1}$，转化到坐标系$\{i\}$下的方程为

$$
\begin{aligned}
&[f_{i-1,i}]_i=Q_i\,[f_{i-1,i}]_{i+1} \\
&[n_{i-1,i}]_i=Q_i\,[n_{i-1,i}]_{i+1}
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

如果重力加速矢量g以及末端作用于外部环境的力和力矩$f_{n,n+1}$和$n_{n,n+1}$在参考坐标系$\{1\}$下指定，则通过递推的方式得到在坐标系$\{i+1\}$为

$$
\begin{aligned}
&[g]_{i+1}=Q_i^{\mathrm{T}}\,[g]_i,\ i=1,\cdots,n \\
&[f_{n,n+1}]_{n+1}=Q^{\mathrm{T}}\,[f_{n,n+1}]_1 \text{ 和 } [n_{n,n+1}]_{n+1}=Q^{\mathrm{T}}\,[n_{n,n+1}]_1
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

关节力$f_{i-1,i}$和力矩$n_{i-1,i}$是作用于关节的合成力和力矩，包含了理想约束力和力矩及电机等执行器作用于关节的主动力或力矩。令单位矢量e_i轴线表示关节i轴线的方向，如果第i个关节为转动关节，执行器绕关节轴产生的主动力矩为τ_i是关节力矩，$n_{i-1,i}$沿着轴线方向e_i的一个分量，表达式为

$$\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{n}_{i-1,i} \tag{7.8}$$

如果第 i 个关节为移动关节，则执行器产生一个力沿着轴线方向为 τ_i，是力 $\boldsymbol{f}_{i-1,i}$ 沿轴线的方向的一个分量，表达式为

$$\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{f}_{i-1,i} \tag{7.9}$$

注意，为了统一，在转动关节和移动关节中使用了相同的符号表示，但关节类型不同，标量 τ_i 的单位不同。

【例 7.1】 平面 2R 串联机械臂，如图 7.3 所示，各杆的长为 a_1, a_2，各杆质心点 C_1, C_2 位于各杆的中心。各坐标系的建立参考第 3 章，在坐标系{3}下，已知机械臂末端作用于环境的力为 $\boldsymbol{f}$，在静态时，求所输入的主动力矩 $\boldsymbol{\tau}_1$ 和 $\boldsymbol{\tau}_2$。

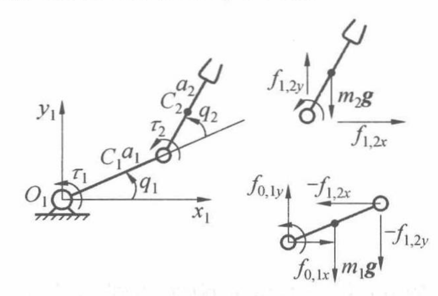


图 7.3　2R 机械臂静力分析

假设在坐标系{3}下，末端对外部环境施加的力及重力 $\boldsymbol{g}$ 在参考坐标系下的矢量为

$$[\boldsymbol{f}_{2,3}]_3 = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{n}_{2,3}]_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.10a}$$

坐标系之间的旋转矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2$ 为

$$\boldsymbol{Q}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{Q}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在坐标系{2}，{3}下，各几何参数和重力的矢量为

$$[\boldsymbol{r}_{1,2}]_2 = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{r}_{2,3}]_3 = \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{r}_{2,C_1}]_2 = \begin{bmatrix} -a_1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{r}_{3,C_2}]_3 = \begin{bmatrix} -a_2/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{g}]_2 = \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{g}]_1 = \begin{bmatrix} -gs_1 \\ -gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{g}]_3 = \boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{g}]_2 = \begin{bmatrix} -gs_{12} \\ -gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.10b}$$

依据式(7.5)可知

$$[\boldsymbol{f}_{1,2}]_3 = [\boldsymbol{f}_{2,3} - m_2\boldsymbol{g}]_3, [\boldsymbol{n}_{1,2}]_3 = [\boldsymbol{n}_{2,3} + (\boldsymbol{r}_{2,3} + \boldsymbol{r}_{3,C_2}) \times \boldsymbol{f}_{1,2} - \boldsymbol{r}_{3,C_2} \times \boldsymbol{f}_{2,3}]_3, i=2 \tag{7.10c}$$

将式(7.10a)、(7.10b)代入式(7.10c)得

$$[\boldsymbol{f}_{1,2}]_3 = \begin{bmatrix} f_x + m_2 g s_{12} \\ f_y + m_2 g c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{n}_{1,2}]_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 f_y + \frac{1}{2} m_2 g a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

$[\boldsymbol{f}_{1,2}]_3$，$[\boldsymbol{n}_{1,2}]_3$ 变换到坐标系{2}下为

$$[\boldsymbol{f}_{1,2}]_2=\boldsymbol{Q}_2[\boldsymbol{f}_{1,2}]_3=\begin{bmatrix} f_x c_2-f_y s_2+m_2 g s_1 \\ f_x s_2+f_y c_2+m_2 g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{n}_{1,2}]_2=\boldsymbol{Q}_2[\boldsymbol{n}_{1,2}]_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 f_y+\frac{1}{2}m_2 g a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

主动力 τ_2 为

$$\tau_2=[\boldsymbol{e}_2]_2\cdot[\boldsymbol{n}_{1,2}]_2=[0\quad 0\quad 1][\boldsymbol{n}_{1,2}]_2=a_2 f_y+\frac{1}{2}m_2 g a_2 c_{12}$$

同理

$$[\boldsymbol{f}_{0,1}]_2=[\boldsymbol{f}_{1,2}-m_2\boldsymbol{g}]_2,[\boldsymbol{n}_{0,1}]_2=[\boldsymbol{n}_{1,2}+(\boldsymbol{r}_{1,2}+\boldsymbol{r}_{2,c1})\times\boldsymbol{f}_{0,1}-\boldsymbol{r}_{2,c1}\times\boldsymbol{f}_{1,2}]_2,i=1$$

则

$$[\boldsymbol{f}_{0,1}]_2=\begin{bmatrix} f_x c_2-f_y s_2+(m_2+m_1)g s_1 \\ f_x s_2+f_y c_2+(m_2+m_1)g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{n}_{0,1}]_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 f_y+\frac{1}{2}m_2 g a_2 c_{12}+a_1 f_x s_2+a_1 f_y c_2+\frac{1}{2}m_{12} g a_1 c_1+\frac{1}{2}m_2 g a_1 c_1 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{f}_{0,1}]_1=\boldsymbol{Q}_1[\boldsymbol{f}_{0,1}]_2=\begin{bmatrix} f_x c_{12}-f_y s_{12} \\ f_x s_{12}+f_y c_{12}+(m_2+m_1)g \\ 0 \end{bmatrix}$$

静力学内向递归计算流程见表 7.1

表 7.1　静力学内向递归计算

给定 $\boldsymbol{f}_{n,n+1}$，$\boldsymbol{n}_{n,n+1}$

%建立 D-H 坐标系，在所建立的局部坐标系下给出 $[\boldsymbol{r}_{i-1,i}]_i$，$[\boldsymbol{r}_{i,c,i-1}]_i$，$i=2,\cdots,n+1$（$n$ 为杆件数），计算出 $\boldsymbol{Q}_1\sim\boldsymbol{Q}_n$，给定 $[g]_1$，计算 $[g]_2\sim[g]_{n+1}$

for $i=n$ to 1 step -1 do

　$[\boldsymbol{f}_{i-1,i}]_{i+1}\leftarrow[\boldsymbol{f}_{i,i+1}-m_i\boldsymbol{g}]_{i+1}$

　$[\boldsymbol{n}_{i-1,i}]_{i+1}\leftarrow[\boldsymbol{n}_{i,i+1}+(\boldsymbol{r}_{i,i+1}+\boldsymbol{r}_{i+1,ci})\times\boldsymbol{f}_{i-1,i}-\boldsymbol{r}_{i+1,ci}\times\boldsymbol{f}_{i,i+1}]_{i+1}$

%在 $i+1$ 坐标系下求得 $[\boldsymbol{f}_{i-1,i}]_{i+1}$，$[\boldsymbol{n}_{i-1,i}]_{i+1}$，转化到 i 坐标系下的方程为

　$[\boldsymbol{f}_{i-1,i}]_i\leftarrow\boldsymbol{Q}_i[\boldsymbol{f}_{i-1,i}]_{i+1}$

　$[\boldsymbol{n}_{i-1,i}]_i\leftarrow\boldsymbol{Q}_i[\boldsymbol{n}_{i-1,i}]_{i+1}$

　if　R 关节 then

　　$\tau_i\leftarrow[\boldsymbol{e}_i]_i\cdot[\boldsymbol{n}_{i-1,i}]_i$

　else

　　$\tau_i\leftarrow[\boldsymbol{e}_i]_i\cdot[\boldsymbol{f}_{i-1,i}]_i$

```
end do
```

$$[\boldsymbol{n}_{0,1}]_1=\boldsymbol{Q}_1[\boldsymbol{n}_{0,1}]_2=\begin{bmatrix}0\\0\\a_2f_y+a_1f_xs_2+a_1f_yc_2+\frac{1}{2}m_1ga_1c_1+m_2ga_1c_1+\frac{1}{2}m_2ga_2c_{12}\end{bmatrix}$$

主动力 τ_1 为

$$\tau_1=[\boldsymbol{e}_1]_1\cdot[\boldsymbol{n}_{0,1}]_1=a_2f_y+a_1f_xs_2+a_1f_yc_2+\frac{1}{2}m_1ga_1c_1+m_2ga_1c_1+\frac{1}{2}m_2ga_2c_{12}$$

写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix}\tau_1\\\tau_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1s_2 & a_1c_2+a_2\\0 & a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_x\\f_y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}m_1ga_1c_1+m_2ga_1c_1+\frac{1}{2}m_2ga_2c_{12}\\\frac{1}{2}m_2ga_2c_{12}\end{bmatrix}\tag{7.10d}$$

7.1.3 能量方法

在7.1.2节中，基于静平衡力所列的瞬时方程求解困难，在复杂的机器人系统中能量方法建立关节力和末端力之间关系是理想的选择。在能量方法中，系统的描述基于能量和功，因此在关节力和力矩中不产生储存和耗散能量的项在方程中排除，这些被排除的项称为理想的约束力和力矩。为了应用能量方法，首先需要确定主动力和力矩，其次发现系统的广义坐标。在关节空间中，关节主动力矩定义为 $\boldsymbol{\tau}=[\tau_1\quad\tau_2\quad\cdots\quad\tau_n]^{\mathrm{T}}$，此矢量表示执行器作用于关节上的力或力矩，理想的约束力和力矩与能量方程无关，无须考虑。在能量方程中，杆件的运动采用独立变量描述，串联开环运动链机构中，关节坐标 $\boldsymbol{q}=[q_1\quad q_2\quad\cdots\quad q_n]^{\mathrm{T}}$ 是完全独立的广义坐标，唯一描述了杆件系统的位姿。考虑 n 自由度串联结构机械臂，关节无摩擦且不考虑杆件的重力，关节主动力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 和末端力螺旋 $\boldsymbol{w}$ 之间的解析关系为

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\tag{7.11}$$

式中，$\boldsymbol{J}$ 是机械臂雅可比矩阵。

利用虚功原理证明公式(7.11)，考虑各关节的虚位移为 $\delta\boldsymbol{q}=[\delta q_1\quad\delta q_2\quad\cdots\quad\delta q_n]^{\mathrm{T}}$，末端的虚位移为 $\delta\boldsymbol{p}=[\delta\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}\quad\delta\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{e}}]^{\mathrm{T}}$，如果 $\boldsymbol{w}$ 表示末端作用于环境的力螺旋，则作用于环境的虚功为 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{p}$，关节主动力在关节空间做的虚功为 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{q}$。当机械臂在平衡状态，依据虚功原理，得

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{q}=\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{p}\tag{7.12a}$$

虚位移 $\delta\boldsymbol{p}$，$\delta\boldsymbol{q}$ 之间的约束关系可以通过雅可比矩阵确定为

$$\delta\boldsymbol{p}=\boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{q}\tag{7.12b}$$

将式(7.12b)代入式(7.12a)，进一步可以写为

$$(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})\delta\boldsymbol{q}=0$$

关节虚位移 $\delta\boldsymbol{q}$ 是独立变量，因为开链的关节坐标是完整和独立的广义坐标，因此，上式成立只能有

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}=0$$

两侧转置可以得

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \tag{7.12c}$$

【例7.2】 图7.3展示了2R平面机械臂，在惯性参考坐标系{1}下，其末端施加于外部环境的作用力为$\boldsymbol{w}=[f_x \quad f_y]^{\mathrm{T}}$，试求此时执行器输入的关节力矩$\boldsymbol{\tau}=[\tau_1 \quad \tau_2]^{\mathrm{T}}$，假设没有摩擦，不考虑杆的重力，得到的结果与公式(7.10d)比较，说明差异。

参考式(4.41)和式(7.11)，作用关节上的力$\boldsymbol{\tau}$与末端作用于外部环境的力$\boldsymbol{w}$的关系为

$$\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-(a_1s_1+a_2s_{12}) & a_1c_1+a_2c_{12}\\ -a_2s_{12} & a_2c_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_x\\ f_y\end{bmatrix} \tag{7.13}$$

比较式(7.10d)与式(7.13)可以看出，式(7.13)不包含重力项，另外，末端作用于外部环境的作用力$\boldsymbol{w}$在式(7.10d)中表示在坐标系{3}下，而在式(7.13)中表示在坐标系{1}下。

7.2 牛顿-欧拉方程

设刚体的质量为m，在惯性参考坐标系下的惯量矩阵为$\boldsymbol{I}$，受到一个作用于质心的力$\boldsymbol{F}$和力矩$\boldsymbol{N}$，首先，根据牛顿第二运动规律得

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F} \tag{7.14}$$

应用附录C式(4)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{I\omega})=\boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I\omega}=\boldsymbol{N} \tag{7.15}$$

简单证明式(7.15)，参考附录C公式(17)可知

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{I}_C\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$$

式中，$\boldsymbol{I}_C$表示在刚体质心点C处建立与刚体固连的坐标系{C}，相对于C点，在坐标系{C}下计算得到的转动惯量矩阵，为常量矩阵。式(7.15)对时间微分，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{I\omega})=\boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}+\dot{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\omega} \tag{7.16}$$

惯量矩阵对时间的微分为

$$\dot{\boldsymbol{I}}=\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{I}_C\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{I}_C\dot{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}} \tag{7.17}$$

由式(4.8)可知

$$\dot{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{\Omega R}$$

代入式(7.17)，得

$$\dot{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\omega}=[\boldsymbol{\Omega R}\boldsymbol{I}_C\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{I}_C(\boldsymbol{\Omega R})^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\Omega R}\boldsymbol{I}_C\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I\omega} \tag{7.18}$$

将式(7.18)代入式(7.16)可以得到式(7.15)。刚体的牛顿-欧拉动力学方程表示为

$$\begin{cases}m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I\omega}=\boldsymbol{N}\end{cases}$$

7.2.1 单杆牛顿-欧拉方程

首先基于牛顿-欧拉方程推导杆件i的动力学方程，如图7.4所示，在惯性参考坐标系下，$\boldsymbol{v}_{C_i}$表示质心点的线速度，$\boldsymbol{\omega}_i$表示刚体的角速度，其他物理变量意义参考图7.1的说明。刚体的惯性力表示为$-m_i\dot{\boldsymbol{v}}_{C_i}$，其中$m_i$为杆$i$的质量，$\dot{\boldsymbol{v}}_{C_i}$表示杆的线加速度。基于达朗贝尔原

理,杆 i 的惯性力加到静平衡方程(7.1)得

$$\boldsymbol{f}_{i-1,i}-\boldsymbol{f}_{i,i+1}+m_i\boldsymbol{g}-m_i\dot{\boldsymbol{v}}_{C_i}=0,i=1,\cdots,n \tag{7.19}$$

作用于杆 i 的惯性力矩为 $-\boldsymbol{I}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i-\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{I}_i\boldsymbol{\omega}_i$,$\boldsymbol{I}_i$ 为杆 i 的质心处惯性张量,惯性力矩加入到式(7.2),得

$$\boldsymbol{n}_{i-1,i}-\boldsymbol{n}_{i,i+1}-(\boldsymbol{r}_{i,i+1}+\boldsymbol{r}_{i+1,C_i})\times\boldsymbol{f}_{i-1,i}+\boldsymbol{r}_{i+1,C_i}\times\boldsymbol{f}_{i,i+1}-\boldsymbol{I}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i-\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{I}_i\boldsymbol{\omega}_i=0,i=1,\cdots,n \tag{7.20}$$

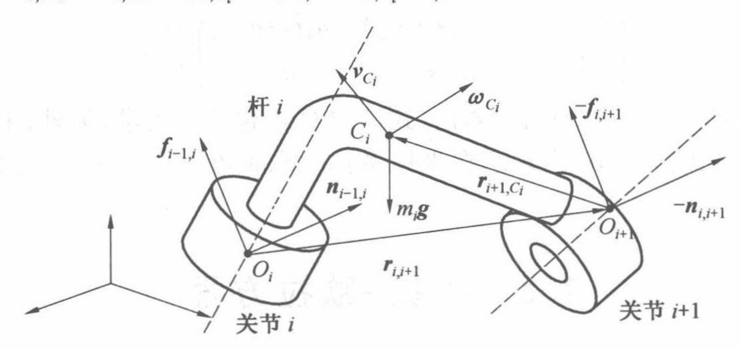


图 7.4 单杆动态受力示意图

式(7.19)、(7.20)包含了杆件的惯性力,其计算涉及机器人运动学分析,运动学分析的顺序应该从基座到末端,依次得到各杆件的速度、加速度进而得出其惯性力,而对于静力学部分,为了求得各关节之间的主动力、约束力,其计算需要从末端到基座。牛顿-欧拉方程推导流程如图 7.5 所示。

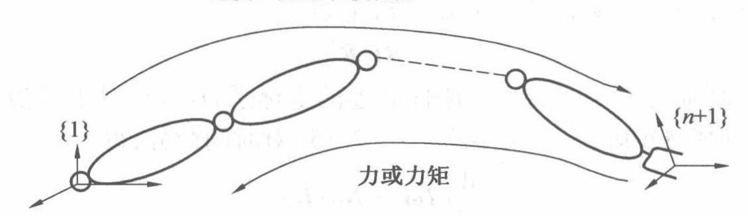


图 7.5 牛顿-欧拉方程推导流程

【例 7.3】 图 7.6 所示为 1 自由度平面机械臂,假定建立的基坐标系为{1},末端坐标系为{2}(未画出),杆的长度为 a,基于牛顿-欧拉方程,推导其动力学方程。

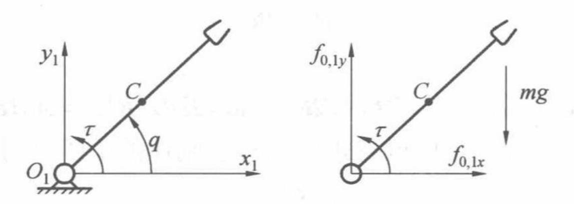


图 7.6 平面单杆牛顿-欧拉动力学建模

杆的姿态用两坐标相对旋转矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 表示为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中,c,s 分别表示 $\cos q$,$\sin q$ 。杆 1 为匀质截面为方形的杆件,在 C 点建立与坐标系{2}

方向一致的坐标系{C},在此坐标系下,杆件为小截面,绕 x 轴的转动惯量忽略不计,杆的转动惯量矩阵为

$$\boldsymbol{I}_C=\frac{ma^2}{12}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{I}_C$ 变换到坐标系{1}下为

$$[\boldsymbol{I}_C]_1=\boldsymbol{Q}\,[\boldsymbol{I}_C]_2\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\frac{ma^2}{12}\begin{bmatrix}s^2&-sc&0\\-sc&c^2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(1)运动学分析。

首先计算杆 1 的速度与加速度,为

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{q}\end{bmatrix},\dot{\boldsymbol{\omega}}=\begin{bmatrix}0\\0\\\ddot{q}\end{bmatrix}$$

质心点为杆的中心,其位置矢量为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{r}_{1,C}=\boldsymbol{r}_{1,2}+\boldsymbol{Q}\,[\boldsymbol{r}_{2,C}]_2=\begin{bmatrix}\mathrm{ac}\\\mathrm{as}\\0\end{bmatrix}+\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}-a/2\\0\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathrm{ac}\\\mathrm{as}\\0\end{bmatrix}$$

式中,$\boldsymbol{r}_{1,C}$表示从坐标系{1}原点 O_1 指向杆 1 质心点的矢量;$\boldsymbol{c}$ 表示杆质心点在坐标系{1}下的位置矢量。则

$$\dot{\boldsymbol{c}}=\frac{a\dot{q}}{2}\begin{bmatrix}-s\\c\\0\end{bmatrix},\ddot{\boldsymbol{c}}=\frac{a\ddot{q}}{2}\begin{bmatrix}-s\\c\\0\end{bmatrix}-\frac{a\dot{q}^2}{2}\begin{bmatrix}c\\s\\0\end{bmatrix}$$

(2)建立牛顿-欧拉方程。

重力加速度方向在坐标系{1}下为

$$\boldsymbol{g}=[0\quad -g\quad 0]^{\mathrm{T}}$$

假定杆 1 对外部环境无作用力,则

$$\boldsymbol{f}_{1,2}=\boldsymbol{n}_{1,2}=0$$

依据式(7.19)和式(7.20),机械臂只有一个杆件,则 $i=1$。此外,对于平面机构,欧拉方程中项 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}$ 为零,则

$$\boldsymbol{f}_{0,1}+m\boldsymbol{g}-m\ddot{\boldsymbol{c}}=0$$

$$\boldsymbol{n}_{0,1}-\boldsymbol{r}_{1,C}\times\boldsymbol{f}_{0,1}-[\boldsymbol{I}_C]_1\dot{\boldsymbol{\omega}}=0$$

进一步计算得

$$\boldsymbol{f}_{0,1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}ma(\ddot{q}s+\dot{q}^2c)\\\frac{1}{2}ma(\ddot{q}c-\dot{q}^2s)+mg\\0\end{bmatrix}$$

$$n_{0,1}=\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{1}{3}ma^2\ddot{q}+\frac{1}{2}mgac\end{bmatrix}$$

最后应用式(7.8),计算 τ,所得动力学方程为

$$\tau=\frac{1}{3}ma^2\ddot{q}+\frac{1}{2}mgac \tag{7.21}$$

在上述计算过程中,如果没有特殊说明,所有变量均在坐标系{1}下表示。单杆机械臂实际绕 O_1 点转动,其欧拉方程也可以写为

$$n_{0,1}+r_{1,C}\times G-I_{O_1}\dot{\omega}=0$$

式中,G 为杆受到的重力;I_{O_1} 表示在坐标系{1}下绕 O_1 点转动的惯性矩阵。

【例 7.4】 参考图 7.3,在惯性坐标系下,应用牛顿-欧拉法,推导 2R 机械臂动力学方程,图中 a_{C_1},a_{C_2} 为杆 1、杆 2 离原点 O_1,O_2 的距离。坐标系之间的旋转矩阵为

$$Q_i=\begin{bmatrix}c_i&-s_i&0\\s_i&c_i&0\\0&0&1\end{bmatrix},i=1,2$$

杆 1、杆 2 各自绕质心转动,在坐标系{2},{3}下的惯性矩阵为

$$I_i=\frac{ma_i^2}{12}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},i=1,2$$

(1)运动学分析。

杆 1 的质心点 C_1 在坐标系{1}下的位置矢量 c_1 为

$$c_1=r_{1,C_1}=\begin{bmatrix}a_{C_1}c_1\\a_{C_1}s_1\\0\end{bmatrix}$$

杆 2 的质心点 C_2 在坐标系{1}下的位置矢量 c_2 为

$$c_2=r_{1,2}+r_{2,C_2}$$

式中,$r_{1,2}=\begin{bmatrix}a_1c_1\\a_1s_1\\0\end{bmatrix}$,$r_{2,C_2}=Q_1Q_2\,[r_{2,C_2}]_3=Q_1Q_2\begin{bmatrix}a_{C_2}\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{C_2}c_{12}\\a_{C_2}s_{12}\\0\end{bmatrix}$

则

$$c_2=\begin{bmatrix}a_1c_1+a_{C_2}c_{12}\\a_1s_1+a_{C_2}s_{12}\\0\end{bmatrix}$$

杆 1 角速度 ω_1 与加速度 $\dot{\omega}_1$ 与质心点线速度 $\dot{c}_1$ 与线加速 $\ddot{c}_1$ 为

$$\omega_1=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{q}_1\end{bmatrix},\dot{\omega}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\\ddot{q}_1\end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{c}}_1=a_{C_1}\dot{q}_1\begin{bmatrix}-s_1\\c_1\\0\end{bmatrix},\ddot{\boldsymbol{c}}_1=a_{C_1}\ddot{q}_1\begin{bmatrix}-s_1\\c_1\\0\end{bmatrix}-a_{C_1}\dot{q}_1^{\ 2}\begin{bmatrix}c_1\\s_1\\0\end{bmatrix}$$

杆 2 角速度 $\boldsymbol{\omega}_2$ 与加速度 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$ 与质心点线速度 $\dot{\boldsymbol{c}}_2$ 与线加速 $\ddot{\boldsymbol{c}}_2$ 为

$$\boldsymbol{\omega}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{q}_1+\dot{q}_2\end{bmatrix},\dot{\boldsymbol{\omega}}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\\ddot{q}_1+\ddot{q}_2\end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{c}}_2=\begin{bmatrix}-a_1s_1\dot{q}_1-a_{C_2}s_{12}\dot{q}_{12}\\a_1c_1\dot{q}_1+a_{C_2}c_{12}\dot{q}_{12}\\0\end{bmatrix},\ddot{\boldsymbol{c}}_2=\begin{bmatrix}-a_1s_1\ddot{q}_1-a_1c_1\dot{q}_1^2-(a_{C_2}s_{12}\ddot{q}_{12}+a_{C_2}c_{12}\dot{q}_{12}^2)\\a_1c_1\ddot{q}_1-a_1s_1\dot{q}_1^2+(a_{C_2}c_{12}\ddot{q}_{12}-a_{C_2}s_{12}\dot{q}_{12}^2)\\0\end{bmatrix}$$

(2)建立牛顿-欧拉方程。

在惯性参考系{1}下,对杆 2 运用牛顿-欧拉方程得

$$\boldsymbol{f}_{1,2}+m_2\boldsymbol{g}-m_2\ddot{\boldsymbol{c}}_2=\boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{n}_{1,2}-\boldsymbol{r}_{2,C_2}\times\boldsymbol{f}_{1,2}-\boldsymbol{I}_2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2=\boldsymbol{0}$$

经过计算得

$$\boldsymbol{f}_{1,2}=\begin{bmatrix}m_2[-a_1s_1\ddot{q}_1-a_1c_1\dot{q}_1^2-(a_{C_2}s_{12}\ddot{q}_{12}+a_{C_2}c_{12}\dot{q}_{12}^2)]\\m_2[a_1c_1\ddot{q}_1-a_1s_1\dot{q}_1^2+(a_{C_2}c_{12}\ddot{q}_{12}-a_{C_2}s_{12}\dot{q}_{12}^2)]+m_2g\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{n}_{1,2}=\begin{bmatrix}0\\0\\m_{22}\ddot{q}_2+m_{21}\ddot{q}_1+v\dot{q}_1^2+G_2\end{bmatrix}$$

对杆 1 运用牛顿-欧拉方程得

$$\boldsymbol{f}_{0,1}-\boldsymbol{f}_{1,2}+m_1g-m_2\ddot{\boldsymbol{c}}_1=\boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{n}_{0,1}-\boldsymbol{n}_{1,2}-\boldsymbol{r}_{1,C_1}\times\boldsymbol{f}_{0,1}+\boldsymbol{r}_{2,C_1}\times\boldsymbol{f}_{1,2}-\boldsymbol{I}_1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1=\boldsymbol{0}$$

计算得

$$\boldsymbol{n}_{0,1}=\begin{bmatrix}0\\0\\m_{11}\ddot{q}_1+m_{12}\ddot{q}_2-v\dot{q}_2^2-2v\dot{q}_1\dot{q}_2+G_1\end{bmatrix}$$

式中

$$m_{11}=m_1a_{C_1}^2+I_1+m_2(a_1^2+a_{C_2}^2+2a_1a_{C2}c_2)+I_2$$
$$m_{22}=m_2a_{C_2}^2+I_2$$
$$m_{12}=m_{21}=m_2(a_{C_2}^2+a_1a_{C_2}c_2)+I_2$$
$$v=m_2a_1a_{C_2}s_2$$
$$G_1=m_1ga_{C_1}c_1+m_2g(a_{C_2}c_{12}+a_1c_1)$$
$$G_2=m_2ga_{C_2}c_{12}$$

2R 机械臂动力学方程写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-v\dot{q}_2^{\ 2}-2v\dot{q}_1\dot{q}_2\\ v\dot{q}_1^{\ 2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}G_1\\ G_2\end{bmatrix} \tag{7.22}$$

7.2.2 动力学方程的物理意义

阐述平面2R机械臂动力学方程所蕴含的物理意义，方程中最后一项 G_1，G_2，是由重力引起的，为杆1和杆2的质量作用与关节1和关节2的重力矩，当机械臂水平展开时，重力矩最大。

动力学方程(7.22)中第1项 m_{11} 为惯性项。当第2个关节保持不动，即 $\dot{q}_2=\ddot{q}_2=0$，忽略重力项，动力学方程为 $\tau_1=m_{11}\ddot{q}_1$，表示为杆1、杆2一起加速运动作用于关节的力矩。m_{11} 表示关节1转动时，杆1和杆2的转动惯量，其中，$m_1a_{C_1}^2+I_1$ 表示杆1绕关节1的转动惯量，另外一部分与杆2有关，在当前状态下，如图7.7所示，杆2的质心点与坐标系{1}原点的距离为

$$L^2=a_1^2+a_{C_2}^2+2a_1a_{C_2}c_2$$

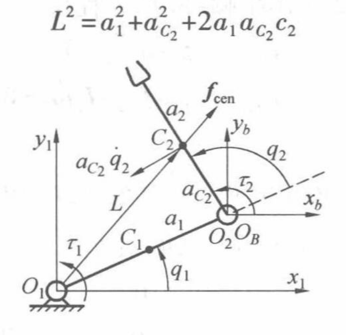


图7.7 2R机械臂动力学方程各项物理意义

根据平行轴原理，杆2绕关节1的转动惯量为 $m_2L^2+I_2$，依赖于机械臂的位形，当 $q_2=0$ 时，最大；当 $q_2=\pi$ 时，最小。

第2项 m_{12} 也为惯性项，当杆1保持不动，即 $\dot{q}_1=\ddot{q}_1=0$，且 $\dot{q}_2=0$ 时，忽略重力项，可以得到 $\tau_1=m_{12}\ddot{q}_2$，来自关节2的加速运动，此时为关节2做加速运动所产生的力作用于关节1，杆1瞬时静止，根据式(7.4)得

$$\boldsymbol{n}_{0,1}=\boldsymbol{n}_{1,2}+\boldsymbol{r}_{1,2}\times\boldsymbol{f}_{1,2} \tag{7.23a}$$

杆2加速运动，其动力学方程为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}_{1,2}&=m_2\ddot{\boldsymbol{c}}_2\\ \boldsymbol{n}_{1,2}&=\boldsymbol{r}_{2,C_2}\times\boldsymbol{f}_{1,2}+\boldsymbol{I}_2\dot{\omega}_2\end{aligned} \tag{7.23b}$$

将式(7.23b)代入式(7.23a)，得

$$\boldsymbol{n}_{0,1}=\boldsymbol{r}_{1,C2}\times m_2\ddot{\boldsymbol{c}}_2+\boldsymbol{I}_2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\m_2(a_{C_2}^2+a_1a_{C_2}c_2)+I_2\end{bmatrix}\ddot{q}_2$$

第2项表示杆2的加速运动对关节1产生一个反作用力矩，关节1需要额外驱动力矩 τ_1 平衡。

第3项 $v\dot{q}_1^{\ 2}$ 中 v 乘以关节速度的平方，假定在瞬时杆2保持不动，$\dot{q}_2=\ddot{q}_2=0$，$\ddot{q}_1=0$，关节1做匀速转动，如图7.7所示，在杆2质心处产生离心力，此离心力的大小为

$$f_{\text{cen}}=m_2L\dot{q}_1^2$$

此离心力在关节2产生一个力矩，为

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{cen}}=\boldsymbol{r}_{2,C_2}\times\boldsymbol{f}_{\text{cen}}=\begin{bmatrix}0\\0\\-m_2a_1a_{C_2}s_2\dot{q}_1^2\end{bmatrix}$$

同理，杆2做匀速转动引起的离心力，作用于关节1处的力矩为 $v\dot{q}_2^2$，需要施加的反作用力矩为 $-v\dot{q}_2^2$。

方程中第四项 $-2v\dot{q}_1\dot{q}_2$，在瞬时大小正比于关节速度的乘积。瞬时关节1和关节2以速度 $\dot{q}_1$ 和 $\dot{q}_2$ 运动，建立一个临时坐标系 $O_b-\boldsymbol{x}_by_bz_b$，其原点与坐标系{2}原点重合，瞬时方向与坐标系{1}一致，坐标系转动角速度为 $\dot{q}_1$，在此坐标系下，杆2质心线速度为 $a_{C_2}\dot{q}_2$，参考公式(4.28)，由科氏加速度引起的科式惯性力为

$$\boldsymbol{f}_{\text{Cor}}=-2m_2(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{v}_2)=\begin{bmatrix}2m_2a_{C_2}\dot{q}_1\dot{q}_2c_{12}\\2m_2a_{C_2}\dot{q}_1\dot{q}_2s_{12}\\0\end{bmatrix}\tag{7.23d}$$

科氏力在关节1引起的力矩为

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{Cor}}=\boldsymbol{r}_{1,C_2}\times\boldsymbol{f}_{\text{Cor}}=\begin{bmatrix}0\\0\\2m_2a_1a_{C_2}\dot{q}_1\dot{q}_2s_2\end{bmatrix}$$

因为科氏力如式(7.23d)所示，平行于杆2，所以在关节2处不会引起力矩。

7.2.3 机器人动力学方程的结构

当针对不同的机械臂，利用不同的动力学建模方法得出其动力学方程后，为了分析方便，可以整理成不同的形式。

1. 状态空间方程

可以把得到的动力学方程写成

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})\tag{7.24}$$

式中，$\boldsymbol{M}$ 为维数 $n\times n$ 机械臂惯性矩阵；$\boldsymbol{V}$ 为维数 $n\times1$ 矢量，包含离心力和科氏力项；$\boldsymbol{G}$ 为维数 $n\times1$ 矢量，包含重力项。把形如(7.24)的方程称为状态空间方程，因为式中 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 项依赖于广义坐标的位置和速度，而 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{G}$ 项依赖于广义坐标。

2. 位形空间方程

通过把 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 项分解，进一步写成

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{q}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}]+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}}^2]+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})\tag{7.25}$$

式中，$\boldsymbol{B}(q)$ 是维数 $n\times n(n-1)/2$ 科氏系数矩阵；$[\dot{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}]$ 为维数 $n(n-1)/2\times1$ 关节速率相乘矢量为

$$[\dot{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}]=[\dot{q}_1\dot{q}_2\quad\dot{q}_1\dot{q}_3\quad\cdots\quad\dot{q}_{n-1}\dot{q}_n]^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})$ 是维数 $n\times n$ 离心力系数矩阵；$[\dot{\boldsymbol{q}}^2]$ 为维数 $n\times1$ 矢量为

$$[\dot{\boldsymbol{q}}^2]=[\dot{q}_1^2\quad\dot{q}_2^2\quad\cdots\quad\dot{q}_n^2]^{\mathrm{T}}$$

式(7.25)称为位形空间方程,式中矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 全部依赖于广义坐标 $\boldsymbol{q}$。如果动力学方程中各项应用于机械臂的控制中,随着机械臂的运动,其动力学方程中所有矩阵的计算仅依赖于位置的变化。

7.2.4 机器人系统计算仿真

前面讲过,机器人动力学通常涉及两个主要问题:一个称为逆动力学问题,在给定机器人几何参数、惯性参数和关节运动,包括位置、速度及加速度前提下,计算关节的力或力矩;另外一个问题为正动力学问题,给定机器人几何参数、惯性参数以及关节驱动的力或力矩,计算关节运动。逆动力学用于机器人控制中,例如,动力学建模中惯项、离心力项及重力项用于控制相关的补偿,正动力学应用于控制方法的仿真,控制方法在用于机器人实际系统中之前,计算仿真是一个重要的过程。

当针对具体的机器人对象进行动力学建模时,所建立的动力学方程写为式(7.24)的形式,即

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})$$

对于机器人运动系统,定义状态矢量为 $\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{q}\quad\dot{\boldsymbol{q}}]^{\mathrm{T}}$ 包含机器人系统的广义坐标与广义速度,$\dot{\boldsymbol{x}}=[\dot{\boldsymbol{q}}\quad\ddot{\boldsymbol{q}}]^{\mathrm{T}}$,上式可以写成非线性状态空间的形式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \tag{7.26}$$

式中,$\boldsymbol{u}$ 为系统输入,表示作用于广义坐标的广义驱动的力或力矩。对 $\boldsymbol{x}$ 的求解必须满足初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$。式(7.26)的目的是把式(7.24)微分二阶方程降为一阶方程。式(7.24)可以写成式(7.26)的隐形式,即

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{q}}\\ \ddot{\boldsymbol{q}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{q}}\\ -\boldsymbol{V}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\tau}\end{bmatrix} \tag{7.27}$$

式中,$\boldsymbol{\tau}$ 为作用于广义坐标的力或力矩,是系统的输入,可以表示为时间的函数;$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵方阵,维度与 $\boldsymbol{q}$ 一致。在大多数情况下,式(7.24)为高度非线性微分方程,在一般情况下,在给定 $\boldsymbol{\tau}$ 的前提下,得不到 $\boldsymbol{q}$ 的解析解,需要通过数值积分的方法求 $\boldsymbol{q}$ 或 $\dot{\boldsymbol{q}}$。对于式(7.26),给定 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t$ 计算 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 的过程,是一个函数评价过程(Function Evaluations),所计算的加速度是位置和速度的函数。通过数值积分的方法,在离算的时间 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 处求解 $\boldsymbol{x}$,需要定义一个时间步长 $\Delta t=t_{i+1}-t_i$,通常此步长在数值积分过程中为常量,而在数字化运动控制系统中,控制信号也以离散的时间间隔更新,因此可以通过数值模拟的方法,对机器人控制系统进行仿真。单输入单输出数字化闭环控制方案如图7.8所示。

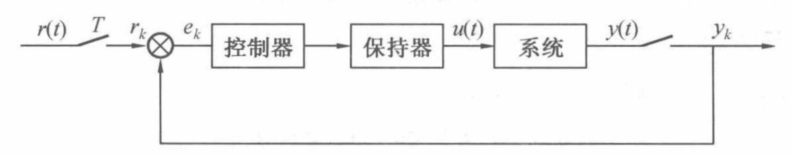


图7.8 单输入输出数字化控制系统原理图

图7.8中,$r(t)$为期望的连续输入轨迹;$y(t)$为跟踪输出;T为采样周期。在第 k 个采样周期中,期望轨迹信号为 r_k,反馈信号为 y_k,产生的输入控制器的信号为 e_k,控制器经过计算并通过执行器作用于系统的输入为 u_k,在保持器作用下,在一个采样周期内,作用于系统的输入保持不变,系统的输入输出是连续的,因此可以通过数值的方法,对机器人系统进行运

动控制方法的仿真。假定系统的模型为机器人动力学模型，其单个坐标输入力或力矩 $\boldsymbol{\tau}$，即为图7.8中运动控制的输入 u，在离算系统下从 kT 到 $(k+1)T$ 周期内，对 $\dot{\boldsymbol{x}}_{kT}$ 的积分可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{kT}\xrightarrow{\text{n. i. s}}\boldsymbol{x}_{(k+1)T}$$

式中，n. i. s 表示数值积分子程序（Numerical Integration Subroutine），利用一阶积分方法，正动力学计算仿真过程见表7.2。

表7.2　正动力学计算仿真过程

步骤1：给定采样周期 T，仿真结束时间 t_{end}，开始时间设定为 $t=kT(k=0,1,2,\cdots)$，给定 $\boldsymbol{x}_{kT}=[\boldsymbol{q}_{kT}\quad \dot{\boldsymbol{q}}_{kT}]^{\text{T}}$。

步骤2：可依据给定的控制方法，计算出 t 时间输入的力或力矩 $\boldsymbol{\tau}$。

步骤3：利用式(7.27)，计算得出 $\dot{\boldsymbol{x}}_{kT}$，此过程用函数评价表示为 $\dot{\boldsymbol{x}}_t=f(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{\tau}_t,t)$，$t=kT$。$\dot{\boldsymbol{x}}_{kT}=[\dot{\boldsymbol{q}}_{kT}\quad \ddot{\boldsymbol{q}}_{kT}]^{\text{T}}$ 已计算得出，作为输入变量输入数值积分子程序，获得 $\boldsymbol{x}_{(k+1)T}=[\boldsymbol{q}_{(k+1)T}\quad \dot{\boldsymbol{q}}_{(k+1)T}]^{\text{T}}$。

步骤4：$t=t+T$，判断是否 $t>t_{\text{end}}$，若是，结束；否则转到步骤2。

数值积分子程序可采用Runge-Kutta四阶积分法（简称R-K法），Adams，Gear等积分方法，不同的积分方法，步骤3,4会略有不同。

【例7.5】　图7.6所示为单杆机械臂，杆长为 $a=1$ m，质量为 $m=1$ kg，重力加速度为 $g=9.81$ m/s^2。初始条件为 $t=0$，$q(0)=\pi/18$ rad，$\dot{q}(0)=0$。在机械臂在力的作用下从初始位置到期望位置 $q_{\text{f}}=\pi/3$ rad，$\dot{q}_{\text{f}}=0$。作用于关节的驱动力矩表示为 $\boldsymbol{\tau}=\tau\boldsymbol{e}$，其中 $\boldsymbol{\tau}$ 表示作用关节上力矩的大小，$\boldsymbol{e}$ 为关节轴线的方向。其控制系统的采用PD控制方法表达为

$$\tau=\gamma(q_{\text{f}}-q)-\beta(\dot{q})+\frac{1}{2}mgac$$

式中，常量增益为 $\gamma=30$ N·m/rad，$\beta=45$ N·m·s/rad。编写Matlab程序仿真，在此控制方法下，单杆机械臂的关节实时输出位置 $\dot{q}$ 和速度 $\dot{q}$。首先定义系统的状态矢量为

$$\boldsymbol{x}=[q\quad \dot{q}]^{\text{T}},\dot{\boldsymbol{x}}=[\dot{q}\quad \ddot{q}]^{\text{T}}$$

根据式(7.27)，关节加速度 $\ddot{q}$ 可以表示为

$$\ddot{q}=\frac{3}{ma^2}\left(\tau-\frac{1}{2}mgac\right)$$

写成状态空间的形式为

$$\begin{cases}\dot{x}(1)=x(2)\\ \dot{x}(2)=\dfrac{3}{ma^2}\left(\tau-\dfrac{1}{2}mgac\right)\end{cases}\tag{7.28}$$

单杆机器人系统由二阶微分方程描述降维为一阶微分方程，Matlab程序见附录D。位置、速度曲线仿真图如图7.9所示。

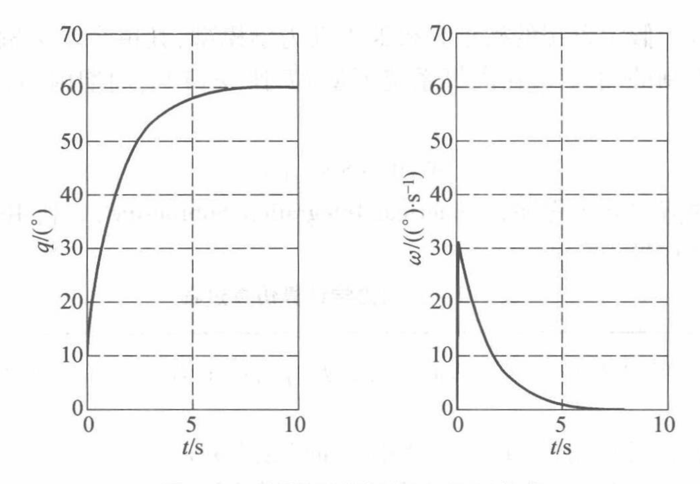


图 7.9　单杆机械臂的 PD 控制仿真

7.2.5　递归牛顿-欧拉算法

假定研究的串联机械臂包含基座总共有 $n+1$ 杆，n 个关节，关节类型为转动关节或者移动关节，已知机械臂各物理参数，关节位置、速度和加速度分别为 $\boldsymbol{q}$，$\dot{\boldsymbol{q}}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{q}}$，采用递归牛顿-欧拉算法求解此机械臂逆动力学过程如下。

1. 运动学的外推

串联机械臂的串联结构参见图 4.10，在基座标系{1}下，杆 i 的角速度 ω_i 和杆 $i-1$ 的角速度 $\boldsymbol{\omega}_{i-1}$ 的递推关系见式(4.43)、(4.44)，即

$$\boldsymbol{\omega}_i=\begin{cases}\boldsymbol{\omega}_{i-1}+\dot{q}_i\boldsymbol{e}_i, & \text{第 } i \text{ 个关节为转动关节}\\ \boldsymbol{\omega}_{i-1}, & \text{第 } i \text{ 个关节为移动关节}\end{cases}\tag{7.29}$$

角加速度递推关系为

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i=\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}+\boldsymbol{\omega}_{i-1}\times\dot{q}_i\boldsymbol{e}_i+\ddot{q}_i\boldsymbol{e}_i\\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}\end{cases}\tag{7.30}$$

式中，$i=1,2,\cdots n$；$\boldsymbol{\omega}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_0$ 是基杆的角速度与角加速度。式(7.29)、(7.30)是坐标不变公式，即在任何坐标系下都成立，只要公式里所有变量表示在同一个坐标系下。为了降低数值计算的复杂度，第 i 个杆相关的所有的矢量或矩阵变量表示在坐标系 F_{i+1} 下，$\boldsymbol{e}_i$ 在坐标系 F_i 下的表示非常简单，为$[0\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}$，看作 $i-1$ 根杆上的矢量。在坐标系 F_i 下的矢量和矩阵变化到坐标 F_{i+1} 系下，需要左乘旋转矩阵 $\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}$。因此角速度 $\boldsymbol{\omega}_i$ 和角加速度 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ 在坐标系 F_{i+1} 下的计算递推关系为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_i&=\begin{cases}\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\omega}_{i-1}+\dot{q}_i\boldsymbol{e}_i)\\ \boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_{i-1}\end{cases}\\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i&=\begin{cases}\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}+\boldsymbol{\omega}_{i-1}\times\dot{q}_i\boldsymbol{e}_i+\ddot{q}_i\boldsymbol{e}_i)\\ \boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}\end{cases}\end{aligned}\tag{7.31}$$

如果基座固定不动，则 $\boldsymbol{\omega}_0=\boldsymbol{0}$，$\dot{\boldsymbol{\omega}}_0=\boldsymbol{0}$，在坐标系 F_i 下，在式(7.31)中，各变量为

$$[\boldsymbol{e}_i]_i=[0\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}$$

令$[\boldsymbol{\omega}_{i-1}]_i=[\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^{\mathrm{T}}$,则

$$[\boldsymbol{\omega}_{i-1}\times\dot{q}_i\boldsymbol{e}_i]_i=\dot{q}_i\begin{bmatrix}\omega_y\\-\omega_x\\0\end{bmatrix},[\ddot{q}_i\boldsymbol{e}_i]_i=\begin{bmatrix}0\\0\\\ddot{q}_i\end{bmatrix}$$

当在坐标系F_i下给定$\boldsymbol{\omega}_{i-1}$时,可以在坐标系$F_{i+1}$下计算得到$\boldsymbol{\omega}_i$。进一步,令$\boldsymbol{c}_i$为杆$i$的质心点$C_i$的位置矢量,$\boldsymbol{r}_{i,C_i}$表示从$F_i$原点$O_i$指向$C_i$的矢量,从图7.10可以看出两个连续杆的质心之间的位置关系为

$$\boldsymbol{c}_i=\boldsymbol{c}_{i-1}+(\boldsymbol{r}_{i-1,i}-\boldsymbol{r}_{i-1,C_{i-1}})+\boldsymbol{r}_{i,C_i}=\boldsymbol{c}_{i-1}+\boldsymbol{r}_{C_{i-1},i}+\boldsymbol{r}_{i,C_i} \tag{7.32}$$

式中,对于转动关节,$\boldsymbol{r}_{i-1,i}$,$\boldsymbol{r}_{C_{i-1},i}$在坐标系$F_i$下为常量,同理,$\boldsymbol{r}_{i,C_i}$在坐标系$F_{i+1}$下也为常量。

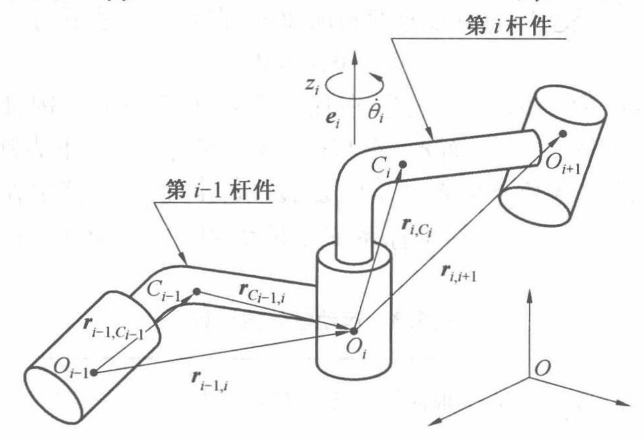


图7.10 R关节相邻两杆位置关系

如果第i个关节为移动关节,如图7.11所示,两个连续杆的质心的位置关系为

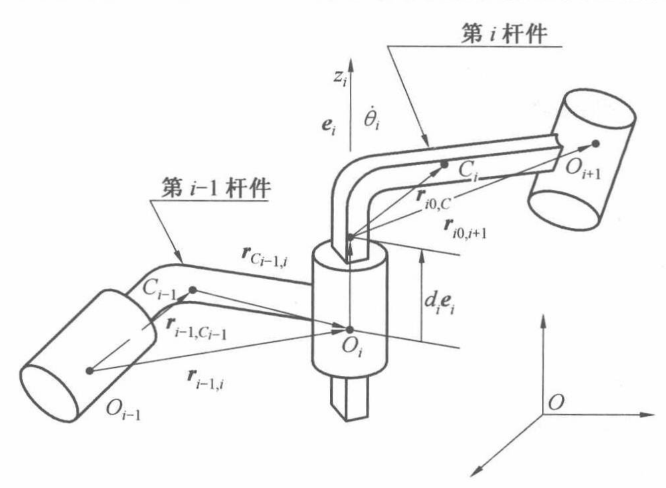


图7.11 P关节相邻两杆位置关系

$$\boldsymbol{c}_i=\boldsymbol{c}_{i-1}+(\boldsymbol{r}_{i-1,i}-\boldsymbol{r}_{i-1,C_{i-1}})+\boldsymbol{d}_i\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{r}_{i0,C_i}=\boldsymbol{c}_{i-1}+\boldsymbol{r}_{C_{i-1},i}+\boldsymbol{d}_i\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{r}_{i0,C_i} \tag{7.33}$$

式中,d_i为关节变量,$\boldsymbol{r}_{i0,C_i}$表示$|d_i|=0$时,原点O_i指向杆i质心点的矢量,在坐标系F_{i+1}下也为常量。式(7.32)、(7.33)两侧对时间微分,则杆$i-1$和杆i线速度和线加速度之间的关系如下:

如果第 i 关节为转动关节

$$\dot{\boldsymbol{c}}_i=\dot{\boldsymbol{c}}_{i-1}+\boldsymbol{\omega}_{i-1}\times\boldsymbol{r}_{C_{i-1},i}+\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{r}_{i,C_i}$$
$$\ddot{\boldsymbol{c}}_i=\ddot{\boldsymbol{c}}_{i-1}+\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}\times\boldsymbol{r}_{C_{i-1},i}+\boldsymbol{\omega}_{i-1}\times(\boldsymbol{\omega}_{i-1}\times\boldsymbol{r}_{C_{i-1},i})+\dot{\boldsymbol{\omega}}_i\times\boldsymbol{r}_{i,C_i}+\boldsymbol{\omega}_i\times(\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{r}_{i,C_i}) \tag{7.34}$$

如果第 i 个关节为移动关节

$$\boldsymbol{\omega}_i=\boldsymbol{\omega}_{i-1}$$
$$\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{r}_{C_{i-1},i}+d_i\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{r}_{i0,C_i}$$
$$\dot{\boldsymbol{c}}_i=\dot{\boldsymbol{c}}_{i-1}+\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{u}_i+\dot{d}_i\boldsymbol{e}_i \tag{7.35}$$
$$\ddot{\boldsymbol{c}}_i=\ddot{\boldsymbol{c}}_{i-1}+\dot{\boldsymbol{\omega}}_i\times\boldsymbol{u}_i+\boldsymbol{\omega}_i\times(\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{u}_i+2\dot{d}_i\boldsymbol{e}_i)+\ddot{d}_i\boldsymbol{e}_i$$

式中，$i=1,2,\cdots n$，$\dot{\boldsymbol{c}}_0,\ddot{\boldsymbol{c}}_0$ 是基杆的质心速度和加速度，在基坐标系下为

$$\dot{\boldsymbol{c}}_0=\boldsymbol{0},\ddot{\boldsymbol{c}}_0=\boldsymbol{0}$$

式(7.34)、(7.35)为坐标不变公式，在任何坐标下都成立。因此为了简化计算，$\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{r}_{C_{i-1},i}$和在与杆 $i-1$ 固连坐标系 F_i，而 $\boldsymbol{r}_{i,C_i}$在与杆 i 固连坐标系 F_{i+1} 下为常量，因此式(7.34)、(7.35)可以表示在与杆 i 固连坐标系 F_{i+1} 下，$\boldsymbol{\omega}_i,\dot{\boldsymbol{\omega}}_i,\ddot{\boldsymbol{c}}_i,\dot{\boldsymbol{c}}_i$ 迭代计算中在坐标系 F_i 下的矢量经过坐标变换到坐标系 F_{i+1} 下，与在坐标系 F_{i+1} 下表示的矢量相加。运动学外推计算见表 7.3。

表 7.3 运动学外推计算

%假定机器人系统有 n 个关节，$n+1$ 根杆件，所建立坐标系为 $n+1$ 个，符号为 $F_1\sim F_{n+1}$

%给定以下初始值

$\boldsymbol{\omega}_0,\boldsymbol{c}_0,\dot{\boldsymbol{\omega}}_0,\dot{\boldsymbol{c}}_0,\ddot{\boldsymbol{c}}_0$

%建立坐标系，D-H 参数表，已知关节位置、速度和加速度为 $\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{q}}$，在所建立的坐标系下计算得出以下常量：

$[\boldsymbol{r}_{C_{i-1},i}]_i,[\boldsymbol{r}_{i,C_i}]_{i+1},i=1,2,\cdots,n$

%计算当前位姿下的旋转矩阵

$\boldsymbol{Q}_1\sim\boldsymbol{Q}_n$

%开始往外递推

for i = 1 to n step −1

%更新

$\boldsymbol{Q}_i$

if R 关节 then

$[\boldsymbol{\omega}_i]_{i+1}\leftarrow\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\omega}_{i-1}+\dot{q}_i\boldsymbol{e}_i]_i$

$[\dot{\boldsymbol{\omega}}_i]_{i+1}\leftarrow\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}[\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}+\boldsymbol{\omega}_{i-1}\times\dot{q}_i\boldsymbol{e}_i+\ddot{q}_i\boldsymbol{e}_i]_i$

$[\boldsymbol{c}_i]_{i+1}\leftarrow\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{c}_{i-1}+\boldsymbol{r}_{C_{i-1},i}]_i+[\boldsymbol{r}_{i,C_i}]_{i+1}$

$[\dot{\boldsymbol{c}}_i]_{i+1}\leftarrow\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}[\dot{\boldsymbol{c}}_{i-1}+\boldsymbol{\omega}_{i-1}\times\boldsymbol{r}_{C_{i-1},i}]_i+[\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{r}_{i,C_i}]_{i+1}$

$[\ddot{\boldsymbol{c}}_i]_{i+1}\leftarrow\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}[\ddot{\boldsymbol{c}}_{i-1}+\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}\times\boldsymbol{r}_{C_{i-1},i}+\boldsymbol{\omega}_{i-1}\times(\omega_{i-1}\times\boldsymbol{r}_{C_{i-1},i})]_i+[\dot{\boldsymbol{\omega}}_i\times\boldsymbol{r}_{i,C_i}+\boldsymbol{\omega}_i\times(\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{r}_{i,C_i})]_{i+1}$

else

$\boldsymbol{\omega}_i=\boldsymbol{\omega}_{i-1}$

$[\boldsymbol{\omega}_i]_{i+1}\leftarrow\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\omega}_{i-1}]_i$

$[\dot{\boldsymbol{\omega}}_i]_{i+1}\leftarrow\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}[\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}]_i$

$[\boldsymbol{u}_i]_{i+1} \leftarrow \boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{r}_{C_{i-1},i}+d_i\boldsymbol{e}_i]_i+[\boldsymbol{r}_{i0,C_i}]_{i+1}$

$[\dot{\boldsymbol{c}}_i]_{i+1} \leftarrow \boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}[\dot{\boldsymbol{c}}_{i-1}+\dot{d}_i\boldsymbol{e}_i]_i+[\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{u}_i]_{i+1}$

$[\ddot{\boldsymbol{c}}_i]_{i+1} \leftarrow \boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}[\ddot{\boldsymbol{c}}_{i-1}+\ddot{d}_i\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{\omega}_i\times 2\dot{d}_i\boldsymbol{e}_i]_i+[\dot{\boldsymbol{\omega}}_i\times\boldsymbol{u}_i+\boldsymbol{\omega}_i\times(\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{u}_i)]_{i+1}$

end if

end do

2. 重力加速度外推

重力加速度从坐标系 F_i变换到坐标系 F_{i+1}的递推公式为

$$[\boldsymbol{g}]_{i+1}=\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{g}]_i, i=1,2,\cdots,n \tag{7.36}$$

3. 动力学计算内推

以末端杆,即第 n 根杆件为例,分析其受力情况,杆 n 所受的力如图 7.12 所示,惯性力未表示出。图中,$\boldsymbol{f}_{n,n+1}$,$\boldsymbol{n}_{n,n+1}$表示机器人末端工具对外部环境施加的作用力和力矩,如果外部环境对末端施加的力和力矩为$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{n}$,根据作用力与反作用力,$\boldsymbol{f}_{n,n+1}=-\boldsymbol{f}$,$\boldsymbol{n}_{n,n+1}=-\boldsymbol{n}$。根据式(7.19)、(7.20),末端的杆牛顿–欧拉方程写成递推的形式为

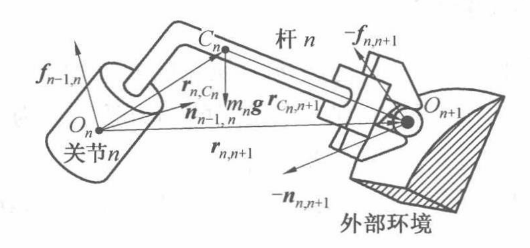


图 7.12 末端杆受力分析

$$[\boldsymbol{f}_{n-1,n}]_{n+1}=[\boldsymbol{f}_{n,n+1}+m_n(\ddot{\boldsymbol{c}}_n-\boldsymbol{g})]_{n+1}$$
$$[\boldsymbol{n}_{n-1,n}]_{n+1}=[\boldsymbol{n}_{n,n+1}+(\boldsymbol{r}_{n,n+1}+\boldsymbol{r}_{n+1,C_n})\times\boldsymbol{f}_{n-1,n}-\boldsymbol{r}_{n+1,C_n}\times\boldsymbol{f}_{n,n+1}+\boldsymbol{I}_n\dot{\boldsymbol{\omega}}_n+\boldsymbol{\omega}_n\times\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{\omega}_n]_{n+1} \tag{7.37}$$

如果第 n 个关节为转动关节,则

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{n}_{n-1,n}]_n&=\boldsymbol{Q}_n[\boldsymbol{n}_{n-1,n}]_{n+1}\\ \tau_n&=[\boldsymbol{e}_n]_n\cdot[\boldsymbol{n}_{n-1,n}]_n\end{aligned} \tag{7.38a}$$

如果第 n 个关节为移动关节,则

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{f}_{n-1,n}]_n&=\boldsymbol{Q}_n[\boldsymbol{f}_{n-1,n}]_{n+1}\\ \tau_n&=[\boldsymbol{e}_n]_n\cdot[\boldsymbol{f}_{n-1,n}]_n\end{aligned} \tag{7.38b}$$

牛顿–欧拉方程对其余杆件的递推关系为

$$[\boldsymbol{f}_{i-1,i}]_{i+1}=[\boldsymbol{f}_{i,i+1}+m_i(\ddot{\boldsymbol{c}}_i-\boldsymbol{g})]_{i+1}, i=n-1,\cdots,1$$
$$[\boldsymbol{n}_{i-1,i}]_{i+1}=[\boldsymbol{n}_{i,i+1}+(\boldsymbol{r}_{i,i+1}+\boldsymbol{r}_{i+1,C_i})\times\boldsymbol{f}_{i-1,i}-\boldsymbol{r}_{i+1,C_i}\times\boldsymbol{f}_{i,i+1}+\boldsymbol{I}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i+\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{I}_i\boldsymbol{\omega}_i]_{i+1} \tag{7.39}$$

动力学内推计算过程见表 7.4。

表 7.4 动力学内推计算过程

给定$\boldsymbol{f}_{n,n+1}$,$\boldsymbol{n}_{n,n+1}$

计算出 $\boldsymbol{Q}_1\sim\boldsymbol{Q}_n$,给定$[\boldsymbol{g}]_1$,计算$[\boldsymbol{g}]_2\sim[\boldsymbol{g}]_{n+1}$

for $i=n$ to 1 step -1 do

```
    [f_{i-1,i}]_{i+1} = [f_{i,i+1} + m_i(c̈_i − g)]_{i+1}
    [n_{i-1,i}]_{i+1} = [n_{i,i+1} + (r_{i,i+1} + r_{i+1,Ci}) × f_{i-1,i} − r_{i+1,Ci} × f_{i,i+1} + I_i ω̇_i + ω_i × I_i ω_i]_{i+1}
    % 在坐标系 i+1 下求得[f_{i-1,i}]_{i+1}，[n_{i-1,i}]_{i+1}，转化到坐标系 i 下的方程为
    [f_{i-1,i}]_i ← Q_i [f_{i-1,i}]_{i+1}
    [n_{i-1,i}]_i ← Q_i [n_{i-1,i}]_{i+1}
    if  R 关节 then
    τ_i ← [e_i]_i · [n_{i-1,i}]_i
    else
    τ_i ← [e_i]_i · [f_{i-1,i}]_i
    end if
end do
```

7.3 拉格朗日方程

7.3.1 第一类拉格朗日方程

在惯性笛卡儿坐标系下，考虑一个包含 m 个质点的系统$\{S\}=\{P_1, P_2,\cdots,P_m\}$的运动，$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_m$ 表示各质心点的位置矢量，第 i 个质点的动力学方程为

$$\boldsymbol{F}_i=m_i\boldsymbol{a}_i \tag{7.40a}$$

式中，$\boldsymbol{F}_i$ 表示作用于质点 P_i 所有主动力的合力；m_i 为质点的质量；$\boldsymbol{a}_i$ 为质点在惯性系下的加速度。

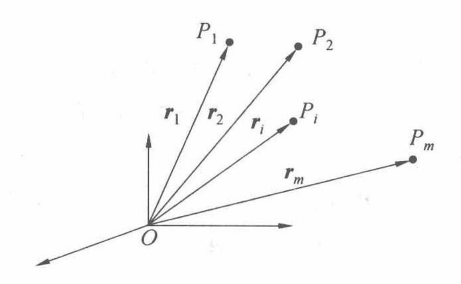


图 7.13　m 质点系统

质点 P_i 的惯性力定义为

$$\boldsymbol{F}_{\text{in},i}=-m_i\boldsymbol{a}_i \tag{7.40b}$$

根据达朗贝尔原理，式(7.40a)、(7.40b)可以写为

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{\text{in},i}=0 \tag{7.41}$$

令质心系的各质心坐标为 $\boldsymbol{q}=[\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\quad \cdots\quad \boldsymbol{q}_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，在惯性笛卡儿坐标系下，$\boldsymbol{q}$ 表示 $3m$ 个相互依赖的坐标系，假设 s 表示系统独立约束方程的个数，则 $f=3m-s$ 表示系统的自由度数。其约束方程可以表示为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q},t)=\boldsymbol{0} \tag{7.42}$$

式中，$\boldsymbol{\Phi}=(\Phi_1,\Phi_2,\cdots\Phi_s)$，$\Phi_i$ 表示第 i 个标量约束方程。对式(7.42)两边取变分，得

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_k}{\partial \boldsymbol{q}_i} \cdot \delta \boldsymbol{q}_i = 0, k = 1,2,\cdots,s \tag{7.43}$$

引入拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}_k(k = 1,2,\cdots,s)$，式(7.43) 两边乘以 $\boldsymbol{\lambda}_k$，并对 k 求和，得

$$\sum_{k=1}^{s} \boldsymbol{\lambda}_k \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_k}{\partial \boldsymbol{q}_i} \cdot \delta \boldsymbol{q}_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{s} \boldsymbol{\lambda}_k \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_k}{\partial \, q_i} \right) \cdot \delta \boldsymbol{q}_i = 0 \tag{7.44}$$

根据达朗贝尔 - 拉格朗日原理(动力学普遍方程)，在理想约束条件下，质心系任意瞬时，所受主动力系和虚加惯性力系在虚位移所做功的和等于零，则系统{S} 动力学方程为

$$\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{in,i}) \cdot \delta \boldsymbol{q}_i = 0 \tag{7.45}$$

式(7.45) 和式(7.44) 相减，得

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\boldsymbol{F}_i - m_i \ddot{\boldsymbol{q}}_i - \sum_{k=1}^{s} \boldsymbol{\lambda}_k \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_k}{\partial \boldsymbol{q}_i} \right) = \mathbf{0} \tag{7.46}$$

对于 s 个不独立的坐标变分，可以选取适当的 $\boldsymbol{\lambda}_k$，使变分前系数为零，独立坐标变分前的系数也应等于零。写为矩阵形式为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{F} \tag{7.47}$$

式中，$\boldsymbol{M}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2,\cdots,\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}) \in \mathbf{R}^{3m\times 3m}$ 为惯性矩阵，其中，$\boldsymbol{m}_i=\mathrm{diag}(m_i,m_i,m_i) \in \mathbf{R}^{3\times 3}$。$\boldsymbol{\lambda}=[\boldsymbol{\lambda}_1 \quad \boldsymbol{\lambda}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\lambda}_s]$，$\boldsymbol{C}=\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{q}}$。式(7.46)称为第一类拉格朗日方程，方程中共有 $3m+s$ 个未知量，$\ddot{\boldsymbol{q}}$ 中 $3m$ 个元素与 $\boldsymbol{\lambda}$ 中 s 个元素，须与方程(7.42)联合求解。式(7.42)对时间两次微分得

$$\boldsymbol{C}\ddot{\boldsymbol{q}}=-\dot{\boldsymbol{\Phi}}_t-\dot{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}}\equiv\boldsymbol{\gamma} \tag{7.48}$$

式中，$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_t$ 表示 $\boldsymbol{\Phi}$ 对时间两次微分。

式(7.47)和式(7.48)写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \tag{7.49}$$

式(7.49)包含 $3m+s$ 个标量方程，可以求解 $3m+s$ 个未知量。矩阵通常非正定，在实际系统中可能稀疏。利用式(7.49)，如果 $\boldsymbol{M}$ 非奇异，可以获得瞬时加速度 $\ddot{\boldsymbol{q}}$ 和拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}$ 的表达式为

$$\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}) \tag{7.50}$$

将式(7.50)代入式(7.48)，得

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{F}-\boldsymbol{\gamma}$$

可以求解出 $\boldsymbol{\lambda}$，进而计算出加速度 $\ddot{\boldsymbol{q}}$。

第一类拉格朗日方程，既适用于完整约束，也适用于非完整约束。它包含了力学系统的全部问题，可求出系统的运动，也可求出各约束系统在系统中的约束力。下面推导第二类拉格朗日方程是第一类的一部分。

【例 7.6】 图 7.14 所示为平面 2R 机械臂，在参考坐标系{1}下(其他与杆件固连坐标系未画出)，杆的长度为 a_1,a_2，质量为 m_1,m_2。各杆质心点 C_1,C_2 分别离原点 O_1,O_2 的距离为 a_{C_1},a_{C_2}，绕质心的沿与 z_1 轴平行方向的转动惯量为 I_1,I_2。对于第 i 杆件，用参数 x_i,y_i 和 $\boldsymbol{q}_i$ 来表示质心，$\boldsymbol{q}_i=[x_i \quad y_i \quad q_i]^{\mathrm{T}}$ 的位置和杆的姿态，其系统的坐标可以定义为 $\boldsymbol{q}=$

$[x_1 \quad y_1 \quad q_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad q_2]^{\mathrm{T}}$,惯性矩阵为 $\boldsymbol{M}=[m_1 \quad m_1 \quad I_1 \quad m_2 \quad m_2 \quad I_2]^{\mathrm{T}}$,主动力为 $\boldsymbol{F}=[0 \quad -m_1 g \quad \tau_1 \quad 0 \quad -m_2 g \quad \tau_2]^{\mathrm{T}}$。

参考图 7.14 和式(1.5),得到四个约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} x_1-a_{C_1}c_1 \\ y_1-a_{C_1}s_1 \\ [x_1+(a_1-a_{C_1})c_1]-(x_2-a_{C_2}c_{12}) \\ [y_1+(a_1-a_{C_1})s_1]-(y_2-a_{C_2}s_{12}) \end{bmatrix}=0 \tag{7.51}$$

$$\boldsymbol{C}=\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{q}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{C_1}s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_{C_1}c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -(a_1-a_{C_1})s_1-a_{C_2}s_{12} & -1 & 0 & -a_{C_2}s_{12} \\ 0 & 1 & (a_1-a_{C_1})c_1+a_{C_2}c_{12} & 0 & -1 & a_{C_2}c_{12} \end{bmatrix} \tag{7.52}$$

$$\boldsymbol{\gamma}=-\dot{\boldsymbol{\Phi}}_t-\dot{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}}=\begin{bmatrix} -a_{C_1}c_1\dot{q}_1^2 \\ -a_{C_1}s_1\dot{q}_1^2 \\ [(a_1-a_{C_1})c_1+a_{C_2}c_{12}]\dot{q}_1^2+2a_{C_2}c_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+a_{C_2}c_{12}\dot{q}_2^2 \\ [(a_1-a_{C_1})s_1+a_{C_2}s_{12}]\dot{q}_1^2+2a_{C_2}s_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+a_{C_2}s_{12}\dot{q}_2^2 \end{bmatrix} \tag{7.53}$$

使用定义的 $\boldsymbol{q}$,$\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$,可以建立平面 2R 机械臂的动力学方程。

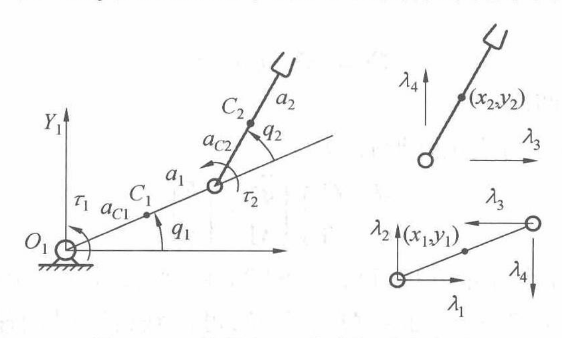


图 7.14　拉格朗日乘子作用示意图

7.3.2　第二类拉格朗日方程

牛顿-欧拉动力学方程基于牛顿第二运动法则推导,所建立的方程中包含了约束力,为了获得解析的动力学方程,在计算过程中需要排除掉理想约束力,计算过程复杂,物理意义直观。第二类拉格朗日方程基于能量和功,而非作用于单个刚体上的力和力矩,推导过程规范而不易出错,是多自由度系统动力学问题重要的理论基础,并能应用于柔体或刚-柔耦合系统。本小节首先论述第二类拉格朗日推导的过程,明确其中变换和演绎的物理意义。

如果系统 $\{S\}$ 是一个完整约束系统,如图 7.13 所示,具有 n 个自由度,则在惯性参考坐标系下,质点 P_i 的位置矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 可以表示成 n 个广义坐标 $\boldsymbol{q}=[q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]^{\mathrm{T}}$ 和时间的矢量函数为

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_n,t) \tag{7.54}$$

在参考坐标系下，对公式(7.54)求微分，质点 P_i 的速度表达形式为

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{7.55}$$

重写为

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{v}_i)_k \dot{q}_k + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{7.56}$$

式中，$(\boldsymbol{v}_i)_k$ 称为质点 P_i 的第 k 个偏速度(Partial Velocity)，定义为

$$(\boldsymbol{v}_i)_k = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \tag{7.57}$$

矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 是广义坐标 $\boldsymbol{q}$ 和时间的函数，与广义速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 无关，而广义坐标 $\boldsymbol{q}$ 中各变量相互独立，式(7.56)对 $\dot{q}_k$ 求导，可以得出一个等效变换

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \tag{7.58}$$

由虚位移的定义，对 $\boldsymbol{r}_i$ 变分运算，得

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{v}_i)_k \delta q_k \tag{7.59}$$

式中，δq_k 为广义坐标 q_k 的变分，称为广义虚位移。根据动力学普遍方程，得

$$\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{\mathrm{in},i}) \cdot \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{v}_i)_k \delta q_k = 0 \tag{7.60}$$

式(7.60)交换 i 和 k 的叠加顺序

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{\mathrm{in},i}) \cdot (\boldsymbol{v}_i)_k \right] \delta q_k = 0 \tag{7.61}$$

式(7.61)中，方括号中的物理量与 δq_k 之乘积为功，因而其物理意义对应广义坐标 q_k 的广义力，将含主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 和惯性力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{in},i}$ 的项重新定义为：

广义主动力

$$Q_k = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i \cdot (\boldsymbol{v}_i)_k \tag{7.62}$$

广义惯性力

$$Q_{\mathrm{in},k} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_{\mathrm{in},i} \cdot (\boldsymbol{v}_i)_k \tag{7.63}$$

式(7.61)变成如下形式：

$$\sum_{k=1}^{n} (Q_k + Q_{\mathrm{in},k}) \delta q_k = 0 \tag{7.64}$$

式(7.64)表示广义坐标中的达朗贝尔 - 拉格朗日原理。对于完整的系统，广义坐标相互独立，虚位移 δq_k 可以任意选择，式(7.64)成立，则只能为

$$Q_k + Q_{\mathrm{in},k} = 0, k = 1,2,\cdots,n \tag{7.65}$$

式(7.65)称为凯恩方程(Kane's Dynamical Equations)，是在广义坐标中受理想、完整、双面约束的非自由质系动力学方程组。对有 n 个广义坐标的系统，每个广义坐标对应一个方程，而且相互独立，是描述非自由质系动力学最少量的方程。在常用坐标系中，如笛卡儿坐标系中也能建立非自由质动力学方程组，但各方程往往互相不独立，必需满足约束条件

的限制，所建的方程数大于 n。式(7.64) 中第一项 $\sum_{k=1}^{n} Q_k \delta q_k$ 的物理意义是广义主动力作用于质点的广义功，质点运动，因而 $\sum_{k=1}^{n} Q_{\text{in},k} \delta q_k$ 与动能有关。考虑广义惯性力为

$$Q_{\text{in},k} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_{\text{in},i} \cdot (\boldsymbol{v}_i)_k = \sum_{i=1}^{m} -m_i \boldsymbol{a}_i \cdot (\boldsymbol{v}_i)_k = \sum_{i=1}^{m} -m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} =$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{m} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right) + \sum_{i=1}^{m} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right) \tag{7.66}$$

将式(7.58) 代入式(7.66)，其第一项能用动能表示为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{m} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{m} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i\right) =$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i\right) \tag{7.67}$$

式(7.66) 第二项，若能交换对时间和广义坐标 q_k 求导顺序，即得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_k} \tag{7.68}$$

第二项可以用动能表示为

$$\sum_{i=1}^{m} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right) = \sum_{i=1}^{m} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i\right) = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i\right) \tag{7.69}$$

在矢量函数 $\boldsymbol{r}_i$ 中，广义坐标与时间之间并不独立，坐标随时间而变化。能否交换求导顺序，拉格朗日给出了严格的证明，式(7.55) 对广义坐标 q_k 求偏导。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t \partial q_k} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t \partial q_k}
\end{aligned} \tag{7.70}$$

故证明了式(7.68) 成立。

在惯性坐标系下，系统的动能定义为

$$T = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i$$

因此，将式(7.67) 和(7.69) 代入式(7.66)，得

$$Q_{\text{in},k} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k} \tag{7.71}$$

将式(7.71) 代入式(7.65)，得到第二类拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, k = 1, 2, \cdots, n \tag{7.72}$$

展开写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \tag{7.73a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_k}, k = 1, 2, \cdots, n \tag{7.73b}$$

第二类拉格朗日方程是在广义坐标中用动能和广义力表示的质系动力学方程,等效变换式(7.58)和(7.68)是其推导过程的关键之处,所以称为拉格朗日方程。

【例7.7】 如图7.14所示,平面2R机械臂,杆长度 $a_1=a_2=1$ m,质量为 $m_1=m_2=1$ kg,重力加速度为 $g=9.81$ m/s^2。为了描述系统的瞬时位形,定义两个广义坐标 q_1,q_2,运用第二类拉格朗日法推导动力学方程。

1. 运动学分析

参考例7.4,得知杆1、杆2的杆角速度和质心点线速度为

$$\boldsymbol{\omega}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{q}_1\end{bmatrix},\dot{\boldsymbol{c}}_1=a_{C_1}\dot{q}_1\begin{bmatrix}-s_1\\c_1\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{q}_{12}\end{bmatrix},\dot{\boldsymbol{c}}_2=\begin{bmatrix}-a_1s_1\dot{q}_1-a_{C_2}s_{12}\dot{q}_{12}\\a_1c_1\dot{q}_1+a_{C_2}c_{12}\dot{q}_{12}\\0\end{bmatrix}$$

式中,$\dot{q}_{12}=\dot{q}_1+\dot{q}_2$。杆1的动能 T_1 表示为

$$T_1=\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{c}}_1\cdot\dot{\boldsymbol{c}}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{C_1}\boldsymbol{\omega}_1=\left(\frac{1}{2}m_1a_{C_1}^2+\frac{1}{24}m_1a_1^2\right)\dot{q}_1^2$$

杆2的动能 T_2 表示为

$$T_2=\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{c}}_2\cdot\dot{\boldsymbol{c}}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{C_2}\boldsymbol{\omega}_2=\frac{1}{2}m_2(a_1^2\dot{q}_1^2+a_{C_2}^2\dot{q}_{12}^2+2a_1a_{C_2}c_2\dot{q}_1\dot{q}_{12})+\frac{1}{24}m_2a_2^2\dot{q}_{12}^2$$

系统的总动能为

$$T=T_1+T_2$$

根据式(7.73),左侧可以按照步骤求导,$k=1,2$。

2. 广义主动力

在惯性系下,作用于杆2的主动力包括重力 $\boldsymbol{G}_2=m_2\boldsymbol{g}_2$,输入力矩 $\boldsymbol{\tau}_2=\tau_2\boldsymbol{e}_1$,作用于杆1主动力包括重力 $\boldsymbol{G}_1=m_1\boldsymbol{g}_1$,输入力矩 $\boldsymbol{\tau}_1=\tau_1\boldsymbol{e}_1$,还有杆2对杆1的反作用力矩 $-\boldsymbol{\tau}_2$,则与 q_1 对应的广义力为

$$Q_1=\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{F}_i\cdot(\boldsymbol{v}_i)_1=\underline{\boldsymbol{\tau}_1\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_1}{\partial\dot{q}_1}+\boldsymbol{G}_1\cdot\frac{\partial\boldsymbol{c}_1}{\partial q_1}-\boldsymbol{\tau}_2\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_1}{\partial\dot{q}_1}}+\underline{\boldsymbol{\tau}_2\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_2}{\partial\dot{q}_1}+\boldsymbol{G}_2\cdot\frac{\partial\boldsymbol{c}_2}{\partial q_1}}$$

与 q_2 对应的广义力为

$$Q_2=\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{F}_i\cdot(\boldsymbol{v}_i)_2=\underline{\boldsymbol{\tau}_1\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_1}{\partial\dot{q}_2}+\boldsymbol{G}_1\cdot\frac{\partial\boldsymbol{c}_1}{\partial q_2}-\boldsymbol{\tau}_2\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_1}{\partial\dot{q}_2}}+\underline{\boldsymbol{\tau}_2\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_2}{\partial\dot{q}_2}+\boldsymbol{G}_2\cdot\frac{\partial\boldsymbol{c}_2}{\partial q_2}}$$

以上步骤经过整理,可以得到式(7.22)。

【例7.8】 图7.14所示平面2R机械臂,运用凯恩方程推导动力学方程。

根据公式(7.63),广义惯性力定义为

$$Q_{\mathrm{in},k}=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{F}_{\mathrm{in},i}\cdot(\boldsymbol{v}_i)_k$$

对于2R平面机械臂为

$$Q_{\text{in},k}=\sum_{i=1}^{2}\left(\boldsymbol{F}_{\text{in},i}\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{c}}_i}{\partial\dot{q}_k}+\boldsymbol{n}_{\text{in},i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_i}{\partial\dot{q}_k}\right),k=1,2$$

式中,惯性力表示$\boldsymbol{F}_{\text{in},i}$为

$$\boldsymbol{F}_{\text{in},i}=-m_i\ddot{\boldsymbol{c}}_i$$

惯性力矩表示为

$$\boldsymbol{n}_{\text{in},i}=-\boldsymbol{I}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i-\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{I}_i\boldsymbol{\omega}_i$$

对于平面2R机械臂,上述各变量推导见例7.4。则

$$Q_{\text{in},1}=\underline{\boldsymbol{F}_{\text{in},1}\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{c}}_1}{\partial\dot{q}_1}+\boldsymbol{n}_{\text{in},1}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_1}{\partial\dot{q}_1}}+\underline{\boldsymbol{F}_{\text{in},2}\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{c}}_2}{\partial\dot{q}_1}+\boldsymbol{n}_{\text{in},2}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_2}{\partial\dot{q}_1}}$$

$$Q_{\text{in},2}=\underline{\boldsymbol{F}_{\text{in},1}\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{c}}_1}{\partial\dot{q}_2}+\boldsymbol{n}_{\text{in},1}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_1}{\partial\dot{q}_2}}+\underline{\boldsymbol{F}_{\text{in},2}\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{c}}_2}{\partial\dot{q}_2}+\boldsymbol{n}_{\text{in},2}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_2}{\partial\dot{q}_2}}$$

根据凯恩方程,得

$$Q_1+Q_{\text{in},1}=0$$

$$Q_2+Q_{\text{in},2}=0$$

式中,Q_1,Q_2见例7.7。以上公式经过整理,也可得到公式(7.22)。

7.3.3 欧拉-拉格朗日方程

如果以广义坐标$\boldsymbol{q}=[q_1\quad q_2\quad\cdots\quad q_n]^{\mathrm{T}}$表示质点系的位置,则质点系的势能可以写为广义坐标的函数,即

$$U=U(q_1,q_2,\cdots,q_n,t)$$

如果公式(7.72)右侧的某些力来自有势力,Q_k可以拆分为两部分Q_{pk}和Q_{nk},前者由U引起,为系统保守广义力,后者为与广义坐标对应的非保守广义力,并且

$$Q_{pk}=-\frac{\partial U}{\partial q_k}$$

则式(7.72)可以写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}+\frac{\partial U}{\partial q_k}=Q_{nk}\tag{7.74}$$

因为$\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_k}=0$,引入拉格朗日函数$L$为

$$L=T-U\tag{7.75}$$

公式(7.74)可以写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=Q_{nk}\tag{7.76}$$

式(7.76)称为欧拉-拉格朗日方程。对于常规的工业机器人,其驱动关节变量可以作为系统的广义坐标,作用于驱动关节的力或力矩即为广义驱动力,式(7.76)可以写

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\tau_k\tag{7.77}$$

式中,τ_k表示作用于第k个关节的力或力矩。

【例7.9】 图7.14所示平面2R机械臂,其动能的表示见例7.7,势能为

$$U=\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{c}_i$$

杆1的势能 U_1 为

$$U_1=m_1\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{c}_1=m_1 g a_{C_1}s_1$$

杆2的势能 U_2 为

$$U_2=m_2\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{c}_2=m_2 g a_1 s_1+m_2 g a_{C_2}s_{12}$$

2R机械臂总的势能为

$$U=U_1+U_2$$

其拉格朗日函数为

$$L=T-U$$

利用公式(7.77)可以推导出2R机械臂的动力学方程,其广义驱动力矩定义为

$$\boldsymbol{Q}_n=\boldsymbol{\tau}=[\tau_1\quad\tau_2]^{\mathrm{T}}$$

对于同一个机械臂采用不同的动力学方程,所得出的计算结果一致,因此应灵活选择并运用合适的动力学建模方法。

7.3.4 n 自由度机械臂动力学方程

基于欧拉-拉格朗日方法推导 n 自由度串联机械臂的动力学方程。空间 n 自由度机器人,假设第 i 杆质心在坐标系{1}的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_{ci}$,其速度和角速度为 $\boldsymbol{v}_{ci}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_i$,系统广义坐标为关节变量 $\boldsymbol{q}=[q_1\quad q_2\quad\cdots\quad q_n]^{\mathrm{T}}$,如图7.15所示。

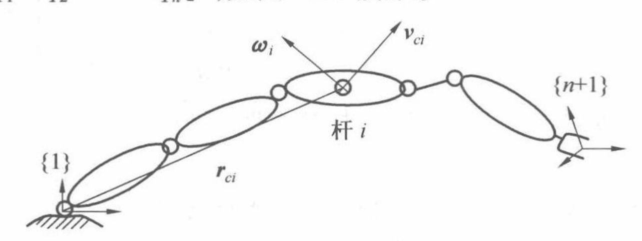


图7.15　n 自由度机械臂速度的表示

当建立系统D-H坐标系后,可利用第4章的知识得出杆 i 质心点速度与广义速率之间的映射关系为

$$\boldsymbol{v}_{ci}=\boldsymbol{J}_{vi}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\tag{7.78a}$$

$$\boldsymbol{\omega}_i=\boldsymbol{J}_{\omega i}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\tag{7.78b}$$

则杆 i 的动能为

$$T_i=\frac{1}{2}(m_i\boldsymbol{v}_{ci}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_{ci}+\boldsymbol{\omega}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{c_i}\boldsymbol{\omega}_i)\tag{7.79}$$

将式(7.78)代入式(7.79),得

$$T_i=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}[m_i\boldsymbol{J}_{vi}(\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{vi}(\boldsymbol{q})+\boldsymbol{J}_{\omega i}(\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{ci}\boldsymbol{J}_{\omega i}(\boldsymbol{q})]\dot{\boldsymbol{q}}\tag{7.80}$$

式(7.80)中,所有矢量,包括惯性张量 $\boldsymbol{I}_{ci}$,在参考坐标系{1}下表示。所有杆的动能可以表示为

$$T=\sum_{i=1}^{n}T_i=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{n}[m_i\boldsymbol{J}_{vi}(\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{vi}(\boldsymbol{q})+\boldsymbol{J}_{\omega i}(\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{ci}\boldsymbol{J}_{\omega i}(\boldsymbol{q})]\dot{\boldsymbol{q}}\tag{7.81}$$

杆 i 的势能可以表示为

$$U_i = m_i \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}_{ci}$$

所有杆的势能表示为

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i \tag{7.82}$$

式(7.81) 简写为

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{7.83}$$

式中,$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{n}\left[m_i \boldsymbol{J}_{vi}(\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{vi}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{J}_{\omega i}(\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I}_{ci} \boldsymbol{J}_{\omega i}(q)\right]$ 为对称正定矩阵,依赖于广义坐标 $\boldsymbol{q}$,则拉格朗日函数为

$$L = T - U = \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i \dot{q}_j - U(\boldsymbol{q}) \tag{7.84}$$

式中

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i \dot{q}_j =$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{q}_1 & \cdots & \dot{q}_k & \cdots & \dot{q}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1k} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{k1} & \cdots & m_{kk} & \cdots & m_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nk} & \cdots & m_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_k \\ \vdots \\ \dot{q}_n\end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} m_{11}\dot{q}_1\dot{q}_1 + \cdots + m_{k1}\dot{q}_k\dot{q}_1 + \cdots + m_{n1}\dot{q}_n\dot{q}_1 \\ \vdots \\ + m_{1k}\dot{q}_1\dot{q}_k + \cdots + m_{kk}\dot{q}_k\dot{q}_k + \cdots + m_{nk}\dot{q}_n\dot{q}_k \\ \vdots \\ + m_{1n}\dot{q}_1\dot{q}_n + \cdots + m_{kn}\dot{q}_k\dot{q}_n + \cdots + m_{nn}\dot{q}_n\dot{q}_n \end{pmatrix}$$

拉格朗日函数对第 k 个广义速率求导,得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j m_{kj}\dot{q}_j \tag{7.85}$$

对时间微分,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j m_{kj}\ddot{q}_j + \sum_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m_{kj}\dot{q}_j = \sum_j m_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{i,j}\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{7.86}$$

L 对第 k 广义坐标求偏导,得

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_k} \tag{7.87}$$

基于欧拉 - 拉格朗日方程,系统动力学可以写为

$$\sum_j m_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{i,j}\left\{\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial U}{\partial q_k} = \tau_k \tag{7.88}$$

通过交换叠加的次序,并利用矩阵 $\boldsymbol{M}$ 对称的特性,得

$$\sum_{i,j}\left\{\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left\{\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i}+\frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

因此

$$\sum_{i,j}\left\{\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i}-\frac{1}{2}\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j=\sum_{i,j}\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i}+\frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j}-\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{7.89}$$

一类克里斯托弗(Christoffel Symbols)定义为

$$v_{ijk}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i}+\frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j}-\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right\} \tag{7.90}$$

定义 G_k 为

$$G_k=\frac{\partial U}{\partial q_k} \tag{7.91}$$

系统的欧拉 - 拉格朗日方程可以写为

$$\sum_j m_{kj}\ddot{q}_j+\sum_{i,j}v_{ijk}\dot{q}_i\dot{q}_j+G_k=\tau_k,k=1,\cdots,n \tag{7.92}$$

简写为矩阵形式为

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{G}=\boldsymbol{\tau}$$

【例 7.10】　图 7.14 所示为平面 2R 械臂,运用以上推导过程建立其动力学方程。

首先分析系统 $\boldsymbol{J}_{\omega i},\boldsymbol{J}_{vi}(i=1,2)$,得

$$\boldsymbol{J}_{\omega1}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{J}_{v1}=\begin{bmatrix}-a_{C_1}s_1&0\\a_{C_1}c_1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{\omega2}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{J}_{v2}=\begin{bmatrix}-a_1s_1-a_{C_2}s_{12}&-a_{C_2}s_{12}\\a_1c_1+a_{C_2}c_{12}&a_{C_2}c_{12}\\0&0\end{bmatrix} \tag{7.93}$$

平面 2R 机械臂总动能为

$$T=\sum_{i=1}^{2}T_i=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{n}\left[m_i\boldsymbol{J}_{vi}(\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{vi}(\boldsymbol{q})+\boldsymbol{J}_{\omega i}(\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{ci}\boldsymbol{J}_{\omega i}(\boldsymbol{q})\right]\dot{\boldsymbol{q}}$$

式中,$\dot{\boldsymbol{q}}=[\dot{q}_1\quad\dot{q}_2]^{\mathrm{T}}$,所有的量表示在惯性参考坐标系下,杆件的惯性张量$\boldsymbol{I}_i$,因为2R机械臂为平面机构,$\boldsymbol{J}_{\omega i}(q)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{ci}\boldsymbol{J}_{\omega i}(\boldsymbol{q})$ 的计算可以简化为$(I_{33})_{ci}\boldsymbol{J}_{\omega i}(\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{\omega i}(\boldsymbol{q})$,$(I_{33})_{ci}=I_i$ 为杆件的惯性张量 $\boldsymbol{I}_{ci}$ 第三行第三列项,进一步得到矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为

$$\boldsymbol{M}=m_1\boldsymbol{J}_{v1}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{v1}+m_2\boldsymbol{J}_{v2}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{v2}+I_1\boldsymbol{J}_{\omega1}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{\omega1}+I_2\boldsymbol{J}_{\omega2}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{\omega2} \tag{7.94}$$

代入式(7.93)计算可以到式(7.22)中的 $\boldsymbol{M}$ 矩阵。下面推导克里斯托弗的符号。

$$v_{111}=\frac{1}{2}\frac{\partial m_{11}}{\partial q_1}=0$$

$$v_{121}=v_{211}=\frac{1}{2}\frac{\partial m_{11}}{\partial q_2}=-m_2a_1a_{C_2}s_2\equiv h$$

$$v_{221}=\frac{\partial m_{12}}{\partial q_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial m_{22}}{\partial q_1}=h$$

$$v_{112}=\frac{\partial m_{21}}{\partial q_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial m_{11}}{\partial q_2}=-h$$

$$v_{122}=v_{212}=\frac{1}{2}\frac{\partial m_{22}}{\partial \boldsymbol{q}_1}=0$$

$$v_{222}=\frac{1}{2}\frac{\partial m_{22}}{\partial q_2}=0 \tag{7.95}$$

杆 1 和杆 2 总势能见例题 7.8，根据公式(7.91)，得

$$\begin{aligned}G_1&=m_1a_{C_1}gc_1+m_2g(a_1c_1+a_{C_2}c_{12})\\G_2&=m_2ga_{C_2}c_{12}\end{aligned} \tag{7.96}$$

由式(7.94)～(7.96)，可以得到 2R 机械臂动力学方程为

$$m_{11}\ddot{q}_1+m_{12}\ddot{q}_2+v_{121}\dot{q}_1\dot{q}_2+v_{211}\dot{q}_2\dot{q}_1+v_{221}\dot{q}_2{}^2+G_1=\tau_1$$

$$m_{21}\ddot{q}_1+m_{22}\ddot{q}_2+v_{112}\dot{q}_1{}^2+G_2=\tau_2$$

【例 7.11】 图 7.16 所示为平面 2R 机械臂，与图 7.14 所示的平面 2R 机械臂驱动方式不同，其第 2 关节的驱动电机安转在基座上，通过同步带或者其他方式对第 2 关节远程驱动，其坐标表示方式也与图 7.14 不同，试建立平面 2R 机械臂远程驱动动力学模型。

首先分析系统 $\boldsymbol{J}_{\omega i},\boldsymbol{J}_{vi}(i=1,2)$，得

$$\boldsymbol{J}_{\omega 1}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{J}_{v1}=\begin{bmatrix}-a_{C_1}s_1&0\\a_{C_1}c_1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{\omega 2}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{J}_{vc2}=\begin{bmatrix}-a_1s_1&-a_{C_2}s_2\\a_1c_1&a_{C_2}c_2\\0&0\end{bmatrix}$$

依据式(7.83)，计算得到的惯性张量矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}m_1a_{C_1}^2+m_2a_1^2+I_1&m_2a_1a_{C_2}\cos(q_2-q_1)\\m_2a_1a_{C_2}\cos(q_2-q_1)&m_2a_{C_2}^2+I_2\end{bmatrix}$$

依据式(7.90)，一类克里斯托弗符号计算为

$$\begin{aligned}&v_{111}=0\\&v_{121}=v_{211}=0\\&v_{221}=-m_2a_1a_{C_2}\sin(q_2-q_1)\equiv h\\&v_{112}=-h\\&v_{122}=0\\&v_{222}=0\end{aligned}$$

坐标 q_2,q_1 所表示的杆 1、杆 2 的总势能为

$$U=m_1ga_{C_1}s_1+m_2g(a_1s_1+a_{C_2}s_2)$$

根据式(7.91)，得到 G_1,G_2 为

$$G_1=(m_1a_{C_1}+m_2a_1)gc_1$$

$$G_2=m_2ga_{C_2}c_2$$

远程驱动平面 2R 机械臂的动力学方程为

$$m_{11}\ddot{q}_1+m_{12}\ddot{q}_2+v_{221}\dot{q}_2{}^2+G_1=\tau_1$$

$$m_{21}\ddot{q}_1+m_{22}\ddot{q}_2+v_{112}\dot{q}_1^{\ 2}+G_2=\tau_2$$

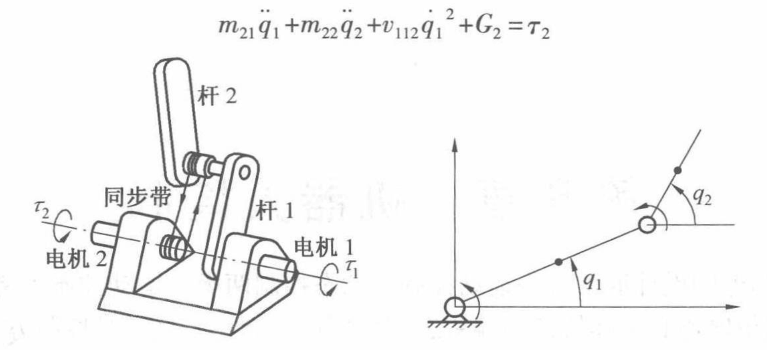


图 7.16　远程控制 2R 平面机械臂

本章小结

本章从串联机械臂静力学入手,分析了机械臂单杆件所受的力及其表示方法,进而研究了牛顿-欧拉方程在机械臂动力学建模中的应用。进一步,研究了一类、二类拉格朗日方程及欧拉-拉格朗日方程在串联机械臂动力学建模中的应用,为复杂多刚体机械臂的动力学建模奠定了基础。

第 8 章 机器人控制

机器人控制器的设计通常分为运动控制和动态控制两类。运动控制不考虑机器人动力学特性,按照期望轨迹和实际轨迹的偏差进行负反馈控制。其优点是控制方法简单,易于实现。但有两个明显的缺点:①难于保证所控制的机器人动态和静态性能良好;②需要较大的控制能量。动态控制依赖于动力学模型,是基于控制对象模型的非线性控制方法,克服了运动控制的缺点,但在控制过程中需要实时进行机器人动力学模型某些项的计算,计算量大,实时控制较困难。

8.1 二阶线性系统

在考虑机器人控制问题之前,先考虑一个简单的机械系统。图 8.1 所示弹簧-阻尼-质量系统,质量为 m 的质量块通过刚度系数为 k 的弹簧连接于基座,与基座表面的摩擦因数为 b,假定摩擦力正比于质量块的速度,质量块的零位置和位移如图 8.1 所示,则此对象的动力学方程为

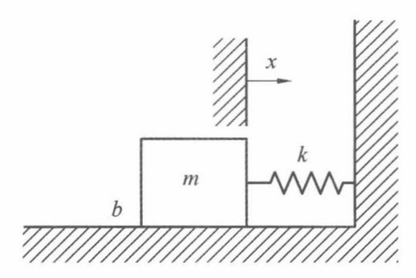


图 8.1 弹簧-阻尼-质量系统

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0 \tag{8.1}$$

式(8.1)为二阶线性常系数微分方程,此单自由度的开环动力学系统通过二阶线性微分方程描述,使用此简单的机械系统,目的是回顾基本的控制概念,此系统受弹簧刚度系数 k,阻尼系数 b 以及质量块的质量 m 大小的影响,如果系统受到外部的扰动,刚度系数小,而阻尼系数大,质量块将以缓慢的方式返回静止的位置;反之,刚度系数过大,摩擦阻尼小,在回到平衡位置之前,质量块可能要来回振荡几次。在系统中,微分方程的解 $x(t)$ 确定质量块的位置。为了研究如式(8.1)所示的微分方程,在复变函数中,通过拉氏变换得

$$ms^2+bs+k=0 \tag{8.2}$$

方程(8.2)的两个根为

$$s_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4mk}}{2m},s_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4mk}}{2m} \tag{8.3}$$

x 的解可以表达为 $x=c_1e^{s_1t}+c_2e^{s_2t}$,其中参数 c_1,c_2 值取决于质量块的初始位置和速度。如果

s_1, s_2 为不相等的实根，即 $b^2>4mk$，系统为过阻尼系统，摩擦占主导地位，系统行为特性趋于稳定。如果 $b^2=4mk$，此时方程具有相等的实根，刚度和摩擦为“平衡”，系统具有最快响应的非振荡特性，称为临界阻尼系统。如果 s_1, s_2 为复根，即 $b^2<4mk$，弹簧刚度系数占主导地位，系统行为特性表现为振荡。式(8.1)可以写为规范的方程形式为

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=0 \tag{8.4}$$

式中，$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$，$\zeta=\frac{b}{2\sqrt{km}}$，$\omega_n$ 和 ζ 分别称为系统固有频率和阻尼比。当 $\zeta=1$ 时，系统为临界阻尼；当 $\zeta>1$ 时，为过阻尼系统；当 $\zeta<1$ 时，时为欠阻尼系统。

8.2　二阶线性系统的控制

再次回到图 8.1 所示的系统，当系统模型中 m, b, k 三个参数不能保证 s_1, s_2 为实根时，系统为欠阻尼或振荡系统，此时如果外部存在扰动，系统为振荡系统；假定考虑通过控制执行器在弹簧-阻尼-质量块上作用一个力 f，当外部存在扰动时，实时改变力 f 的大小和方向，最终可以使系统保持在初始静止位置，此时系统的动力学方程变为

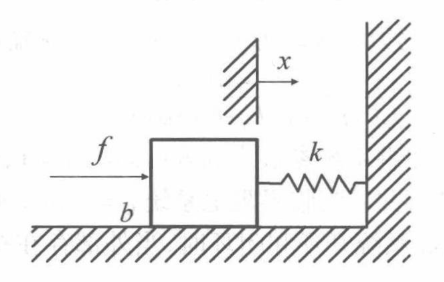


图 8.2　受作用力的弹簧-阻尼-质量系统

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=f \tag{8.5}$$

下面考虑一个问题，如何加载作用力 f 于质量块上，能使系统成为一个稳定系统，假定可以利用传感器观测出质量块的实时位置、速度的输出 $x, \dot{x}$，并期望执行器作用于质量块的力 f 为传感器观测的 $x, \dot{x}$ 的函数，表示为

$$f=-k_px-k_v\dot{x} \tag{8.6}$$

式中，k_p, k_v 分别为位置比例增益与速度比例增益，为可以调节参数。整个系统的控制框图如图 8.3 所示，作用于质量块的力的大小取决于质量块的位置和速度。

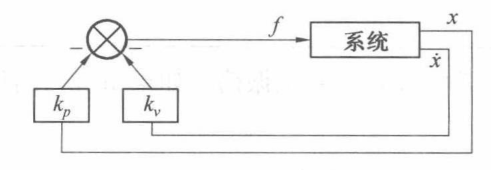


图 8.3　PD 反馈控制系统

当控制系统通过执行器作用于质量块的力符合式(8.6)时，将式(8.6)代入式(8.5)，得

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=-k_px-k_v\dot{x} \tag{8.7}$$

式(8.7)进一步写为

$$m\ddot{x}+(b+k_v)\dot{x}+(k+k_p)x=0 \tag{8.8}$$

简化为

$$m\ddot{x}+b'\dot{x}+k'x=0 \tag{8.9}$$

式(8.9)表示系统的闭环微分方程，$b'=b+k_v$，$k'=k+k_p$ 分别为闭环的阻尼和刚度系数，显然，调整参数 k_p，k_v 可以使式(8.9)所表示的系统的根为实根，满足系统的稳定条件。当如图8.2所示的系统为开环系统时，在拉氏域，输入 f 和输出 x 的传递函数为

$$\frac{x(s)}{f(s)}=G(s)=\frac{1}{ms^2+bs+k} \tag{8.10}$$

式中，$x(s)$，$f(s)$ 是时变量位移 x 和力 f 的拉氏变换。当系统为闭环控制，且存在外部扰时，系统控制原理图如图 8.4 所示。

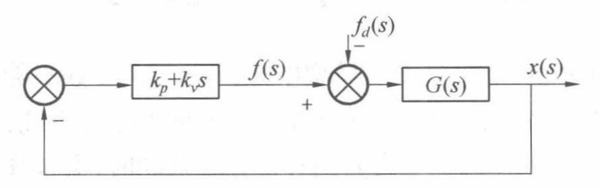


图 8.4　受扰动的 PD 反馈控制系统

图中，$f_d(s)$ 表示作用于系统的扰动力。扰动力 $f_d(s)$ 与闭环系统输出 $x(s)$ 的传递函数为

$$\frac{x(s)}{f_d(s)}=\frac{-G(s)}{1+(k_p+k_vs)G(s)} \tag{8.11}$$

【例 8.1】　如图 8.2 所示，如果系统参数为 $m=1$，$b=1$，$k=1$，假设系统为闭环控制，闭环系统的刚度系数给定为 $k'=16$，并且为临界阻尼系统 $\zeta=1$，试求此时控制系统内部增益参数 k_p，k_v 的值，并编写程序仿真此系统开环和闭环时，当外部存在扰动时的响应情况。系统为临界阻尼系统，则

$$b'=2\sqrt{mk'}=8.0$$

$$b'=b+k_v=8.0$$

因此，$k_p=15$，$k_v=7$。如果系统为开环，传递函数为式(8.10)，当质量块受到冲击扰动 $f_d(s)=1$ 力时，此时 $f_d(s)$ 为输入，输出 $x(s)$ 变化通过 Matlab 仿真，见表 8.1。

表 8.1　单位脉冲扰动编程仿真

```
num =-1
den = [1 1 1]
impulse(num,den)
```

单位脉冲仿真图如图 8.5(a)所示，系统振荡。如果系统为闭环控制，参考式(8.11)，传递函数为

$$\frac{x(s)}{f_d(s)}=\frac{-1}{s^2+8s+16}$$

当质量块受到冲击扰动 $f_d(s)=1$ 时，输出 $x(s)$ 变化通过 Matlab 仿真，从图 8.5(b)可以看出，$x(s)$ 的输出趋向稳定。

如果期望质量块移动到期望的位置 x_d，采用 PD 反馈控制，系统的输入为 $e=x_d-x$，控制

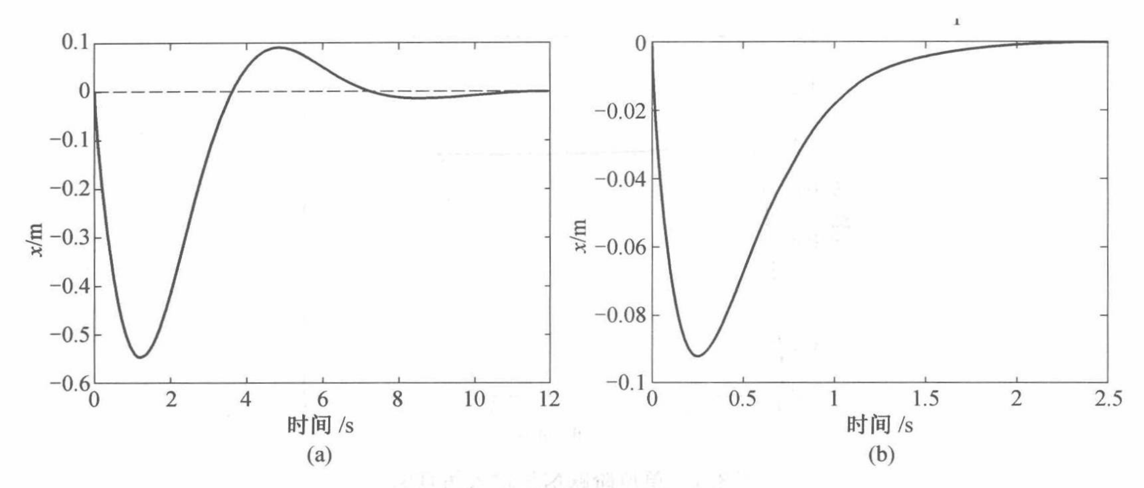


图 8.5　单位脉冲扰动仿真图

系统框图如图 8.6 所示

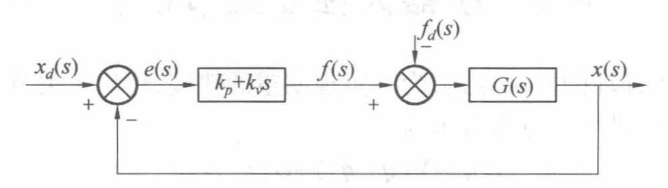


图 8.6　PD 位置控制框图

当 $f_d(s)=0$，系统闭环的输出 $x(s)$ 与期望输入 $x_d(s)$ 的传递函数为

$$\frac{x(s)}{x_d(s)}=\frac{G(s)(k_p+k_v s)}{1+(k_p+k_v s)G(s)}$$

如果式中 $k_p=15$，$k_v=7$，则传递函数可以表示为

$$\frac{x(s)}{x_d(s)}=\frac{7s+15}{s^2+8s+16}$$

对于阶跃输入信号 $x_d(s)=1/s$，输出 $x(s)$ 的响应情况，Matlab 仿真编程见表 8.2。

表 8.2　单位阶跃信号输入编程仿真

```
num =[7 15]
den = [1 8 16]
step(num,den)
```

仿真图如图 8.7 所示，系统为稳定的系统，但当期望的输入信号为阶跃信号 $x_d=1$ 时，系统输出并不为 1，这是因为 PD 控制方法无法消除系统稳态误差造成的。

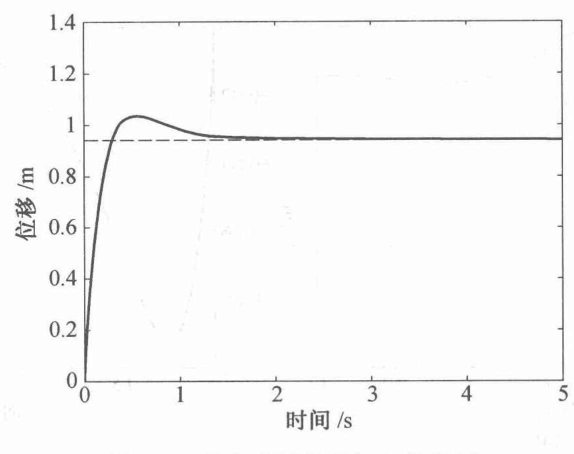


图 8.7 单位阶跃信号输入仿真图

8.3 机器人独立关节控制

如果机械臂采用开环的控制方式,为了实现期望的轨迹,作用于关节的力可以通过动力学模型直接计算得到,动力学方程表示为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}_d+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{q}_d,\dot{\boldsymbol{q}}_d)+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}_d)=\boldsymbol{\tau}$$

式中,$\boldsymbol{q}_d$,$\dot{\boldsymbol{q}}_d$,$\ddot{\boldsymbol{q}}_d$ 为所规划的期望关节位置、速度与加速度,作为控制系统的输入变量。假如使用上述公式计算作用于关节的力,在动力学模型中所包含的物理量,如与机械臂杆件的长度、质量和转动惯量以及关节中的摩擦力,还有减速器回差及外部扰动等物理量的不确定性,在此力的作用下,机械臂可能实现不了期望的轨迹。因此,机械臂的控制采用闭环反馈的控制方式是必要的,控制系统的输入为期望位置、速度与实际位置 $\boldsymbol{q}$、速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 的偏差,期望的位置、速度为规划得到,实际位置、速度通过传感器测量得到,偏差表示为

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{q}_d-\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{e}}=\dot{\boldsymbol{q}}_d-\dot{\boldsymbol{q}}$$

本节研究简单的、可靠的机器人独立关节控制方法,在此控制方法中,对机械臂每个关节的控制都是单输入单输出系统,运动中任何其他杆件对此关节的耦合影响看成外部的扰动,此控制方法适应于非快速运动的应用领域,其控制原理如图 8.8 所示。

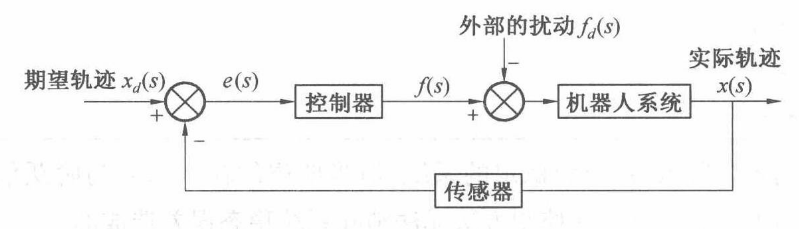


图 8.8 机器人独立关节控制原理图

8.3.1 永磁直流电机模型

如果每个关节驱动采用永磁直流电机驱动,永磁直流电机是自动控制中常用的执行原件,输入的电压信号转换成转轴的角位移或者角度输出,一般要求直流电机具有优良的快速响应特性,即要求电机的机电时间常数小,转动矩转动惯量比大,调速范围宽。除此之外,电

机转矩脉动小,低速运行平稳。永磁直流电机电气原理如图8.9所示。系统动态方程如下:

$$V=V_b+Ri_a+L\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} \tag{8.12}$$

$$V_b=k_b\omega_m=k_b\frac{\mathrm{d}\theta_m}{\mathrm{d}t} \tag{8.13}$$

$$\tau_m=k_m i_a \tag{8.14}$$

$$\tau_m=\tau_l+B_m\frac{\mathrm{d}\theta_m}{\mathrm{d}t}+J_a\frac{\mathrm{d}^2\theta_m}{\mathrm{d}t^2} \tag{8.15}$$

$$k_m=\frac{PN\Phi}{2\pi a}$$

$$k_b=\frac{PN\Phi}{60a}$$

式中　V,L,R,V_b,i_a——永磁直流电机动态过程中的电枢电压(V)、电感(H)、电阻(Ω)、感应电动势(V)以及电枢电流(A);

ω_m——电机机械角速度;

θ_m——电机机械角度,rad;

τ_m——电磁转矩的瞬时值,N·m;

τ_l——负载转矩,包括电机轴上外部输入转矩和恒定阻力转矩,N·m;

B_m——阻力系数,正比于转子机械角速度;

J_a——转子转动惯量 kg·m²;

k_m——转矩系数,$\frac{pN\Phi}{2\pi a}$,(Nm/amp);

k_b——感应电动势系数,$\frac{pN\Phi}{60a}$。

其中　Φ——对应于定子的磁通;

p——极对数;

N——电枢绕组总导体数;

a——电枢绕组的并联支路对数。

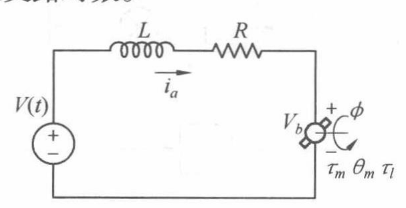


图8.9　永磁直流电机电气原理图

对已制成的永磁直流电机来说,在电机正常运行中,当不考虑饱和时,Φ不变,k_m,k_b为常数。综合式(8.12)~(8.15),直流电机输入电压V,转子机械角速度ω_m和电磁转矩τ_m的关系为

$$\frac{k_m}{R}V=\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}\tau_m}{\mathrm{d}t}+\tau_m+\frac{k_m k_b}{R}\omega_m \tag{8.16}$$

式中,$c_e=L/R$定义为电气时间常数,由于电枢绕组电感L很小,电气时间常数很小,所以常

常略去电机的电气过渡过程,近似认为 $L/R\approx 0$,此时电压、角速度与电磁转矩的关系为

$$\tau_m=\frac{k_m}{R}V-\frac{k_m k_b}{R}\omega_m \tag{8.17}$$

根据式(8.17),得出典型的直流电机转矩-角速度曲线如图 8.10 所示。在一定温度下,普通永磁直流电机的磁通基本不随负载而变化,与并励直流电机相同,k_m,k_b 基本保持不变,在给定的输入电压 V 下,输出的电磁力矩随转速的增加而下降。

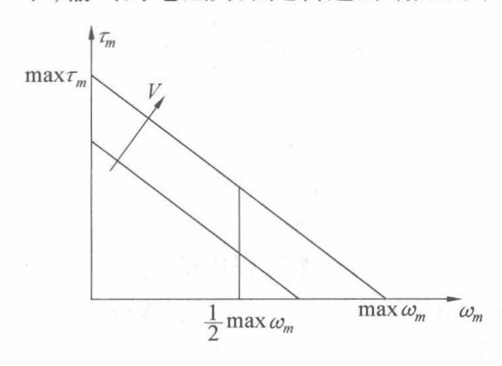


图 8.10　转矩角速度曲线

式(8.12)~(8.15)进行拉氏变换,令初始条件为零,整理得

$$V(s)-V_b(s)=(Ls+R)i_a(s) \tag{8.18}$$

$$V_b(s)=k_b s\theta_m(s) \tag{8.19}$$

$$\tau_m(s)=k_m i_a(s) \tag{8.20}$$

$$\tau_m(s)-\tau_l(s)=(J_a s^2+B_m s)\theta_m(s) \tag{8.21}$$

系统的外部输入量为电压 $V(s)$ 和负载转矩 $\tau_l(s)$,以角度 θ_m 为输出量,式(8.18)~(8.21)所表示的系统可的框图的形式表示为图 8.11。由图 8.11 可见,永磁直流电机本身是一个闭环系统,感应电动势引入与电机角速度成正比的负反馈信号,增加了系统的有效阻尼。

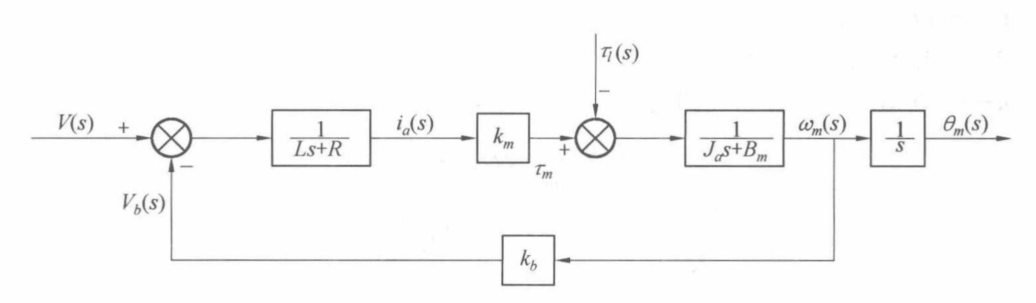


图 8.11　永磁直流电机系统框图

8.3.2　含轮系的直流电机控制模型

直流电机通过减速系统连接到机械臂的关节,各关节减速比较大,一般为 20~200 甚至更大,大的减速比降低耦合到此关节的外部扰动力,并提高了电机输出力矩,下面将建立含轮系的独立关节控制模型。图 8.12 为典型的单关节传动方案,包括直流电机,通过齿轮减速系统连接到机械臂的关节轴,减速比用 r 表示。电机输出的角位移、角速度为 θ_m,ω_m,经

过齿轮系统后传递到关节轴的角位移、角速度分别为 θ_s,ω_s，显然 $\theta_m/\theta_s=r$，作用关节上的主动力矩 τ_s，对电机而言为外部负载，作为外部负载传递到电机转子上为 $\tau_l=\tau_s/r$。J_a 分别为电机的转子转动惯量，J_g 为齿轮 1、齿轮 2 等效的转动惯量，两者之和为 $J_m=J_a+J_g$。

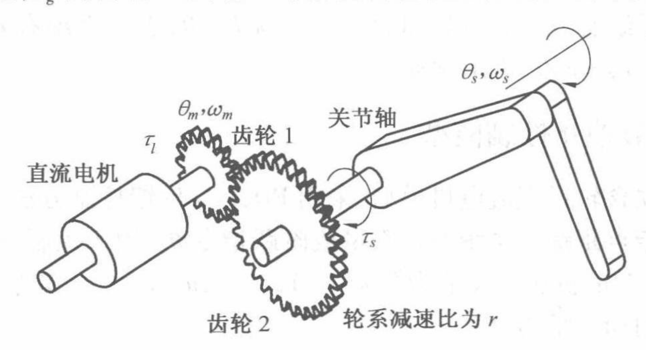


图 8.12 单关节含电机轮系的集中模型

如图 8.12 所示系统，其动力学方程为

$$J_m\ddot{\theta}_m+B_m\dot{\theta}_m=\tau_m-\frac{\tau_s}{r}=k_m i_a-\frac{\tau_s}{r} \tag{8.22}$$

式(8.22)与式(8.21)比较可知，通过直流电机驱动关节的运动，外部负载 $\tau_l=\tau_s/r$ 变化，电机系统的转动惯量因为轮系的原因有变化，其他没有变化。因此控制原理图与图8.11类似，只是里面有些变量发生了变化。

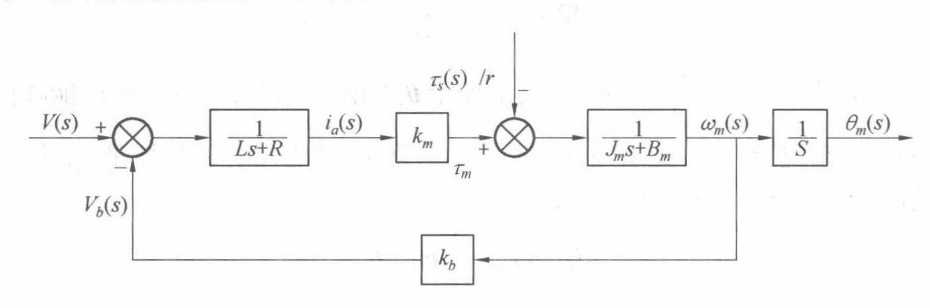


图 8.13 含轮系单关节控制框图

从 $V(s)$ 到 $\theta_m(s)$ 的传递函数为

$$\frac{\theta_m(s)}{V(s)}=\frac{k_m}{s[(Ls+R)(J_m s+B_m)+k_b k_m]} \tag{8.23a}$$

从关节驱动力矩 τ_s 到 $\theta_m(s)$ 的传递函数为

$$\frac{\theta_m(s)}{\tau_s(s)}=\frac{-(Ls+R)/r}{s[(Ls+R)(J_m s+B_m)+k_b k_m]} \tag{8.23b}$$

电气常数 c_e 非常小，因此，对于多数机电耦合的系统，令 $c_e\approx 0$ 是一个合理的简化。而机械常数 $c_m=J_m/B_m$ 相对于电气常数较大。式(8.23a)和式(8.23b)进一步简化为

$$\frac{\theta_m(s)}{V(s)}=\frac{k_m/R}{s(J_m s+B_m+k_b k_m/R)} \tag{8.24a}$$

$$\frac{\theta_m(s)}{\tau_s(s)}=\frac{-1/r}{s(J_m s+B_m+k_b k_m/R)} \tag{8.24b}$$

在时域，式(8.24a)、(8.24b)叠加得出二阶微分方程为

$$J_m\ddot{\theta}_m+(B_m+k_bk_m/R)\dot{\theta}_m=(k_m/R)V-\tau_s/r \tag{8.25}$$

公式简写为

$$J_{\text{eff}}\ddot{\theta}_m+B_{\text{eff}}\dot{\theta}_m=u_{\text{eff}}-d_{\text{eff}} \tag{8.26}$$

式中，$J_{\text{eff}}=J_m$，表示系统有效的转动惯量；$B_{\text{eff}}=B_m+k_bk_m/R$，表示系统有效的阻尼；$u_{\text{eff}}=(k_m/R)V$，表示控制输入；$d_{eff}=\tau_s/r$，表示扰动输入。

8.3.3 单关节独立控制模型

基于上面所建立含轮系直流电机模型，采用 PD，PID 反馈控制方法，研究 n 关节机器人定点跟踪的问题。定点跟踪是系统跟踪常量或阶跃指令 θ_d，用于控制点到点的运动。如图 8.12 所示，假定所控制的机械臂关节为第 $k(k=1,2,\cdots,n)$ 个关节，参考第 7 章内容，机器人动力学方程和电机的动力学为

$$\begin{aligned}&\sum_j m_{kj}\ddot{\theta}_{sj}+\sum_{i,j}v_{ijk}\dot{\theta}_{si}\dot{\theta}_{sj}+G_k=\tau_{sk}\\&J_{mk}\ddot{\theta}_{mk}+(B_{mk}+k_{bk}k_{mk}/R_k)\dot{\theta}_{mk}=k_{mk}/R_kV_k-\tau_{sk}/r_k\end{aligned} \tag{8.27}$$

式中，$\theta_{mk}=r_k\theta_{sk}$。上述方程可以合写为

$$\left[J_{mk}+\frac{1}{{r_k}^2}m_{kk}(\theta_s)\right]\ddot{\theta}_{mk}+(B_{mk}+k_{bk}k_{mk}/R_k)\dot{\theta}_{mk}=k_{mk}/R_kV_k-d_{\text{eff}k} \tag{8.28}$$

式中，$d_{\text{eff}k}$ 定义为

$$d_{\text{eff}k}=\frac{1}{r_k}\left(\sum_{j\neq k}m_{kj}\ddot{\theta}_{sj}+\sum_{i,j}v_{ijk}\dot{\theta}_{si}\dot{\theta}_{sj}+G_k\right) \tag{8.29}$$

在式(8.28)中，项 $J_{mk}+\frac{1}{{r_k}^2}m_{kk}(\boldsymbol{\theta}_s)$ 是关节变量 $\boldsymbol{\theta}_s$ 的函数，较大的减速比 r_k 能降低此项对系统的影响。在系统设计中，此项经常定义为均值常量，或者用有效的惯量 $J_{\text{eff}k}$ 作为实际惯量的近似值。式(8.28)中各项进一步等效为

$$\begin{cases}J_{\text{eff}k}=J_{mk}+\frac{1}{{r_k}^2}m_{kk}(\boldsymbol{\theta}_s)\\B_{\text{eff}k}=B_{mk}+k_{bk}k_{mk}/R_k\\u_{\text{eff}k}=k_{mk}/R_kV_k\end{cases} \tag{8.30}$$

将式(8.30)代入式(8.28)，并省略下标，对于机械臂单关节的控制模型，可以表示为

$$J\ddot{\theta}+B\dot{\theta}=u-d \tag{8.31}$$

独立关节控制系统简化的控制原理图如图 8.14 所示。

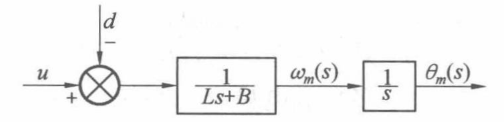


图 8.14 独立关节控制简化的原理图

8.3.4 PD 控制器

使用 PD 控制方法，控制输入 u 在拉氏域给定为

$$u(s)=(k_p+k_vs)[\theta_d(s)-\theta(s)] \tag{8.32}$$

式中,k_p,k_v 分别为比例和微分增益,其闭环控制框图如图 8.15 所示,输入 θ_d 与输出 θ 的传递函数为

$$\frac{\theta_m(s)}{\theta_d(s)}=\frac{k_v s+k_p}{Js^2+(B+k_v)s+k_p}=\frac{k_v s/J+\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{8.33}$$

式中,$\omega_n=\sqrt{k_p/J}$,阻尼比 ζ 定义为

$$\zeta=\frac{B+k_v}{2\sqrt{k_p J}} \tag{8.34}$$

在系统中,固有频率 ω_n、阻尼比 ζ 现在由参数 k_p,k_v 确定。如果 k_p 增大,系统调整时间减少,响应加快,而 k_v 增加,系统阻尼比增加,抑制了系统的超调量。合理选择 k_p,k_v 的参数值,能保证 ω_n,ζ 满足系统调整时间和超调量的要求。对于临界阻尼,此时 $k_v=2\sqrt{k_p J}-B$。PD 控制方法广泛用于机器人控制中。

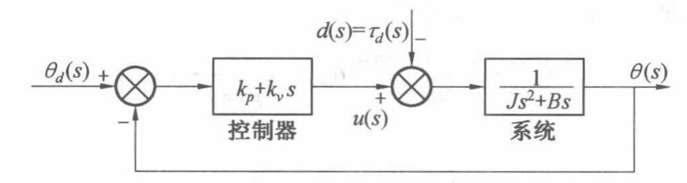


图 8.15　PD 独立关节控制原理框图

从控制框图可以看出,当 $\tau_d\neq0$,在 θ_d 与 τ_d 输入时,其输出 θ 表示为

$$\theta(s)=\frac{k_v s+k_p}{p(s)}\theta_d(s)-\frac{1}{p(s)}\tau_d(s) \tag{8.35}$$

式中,$p(s)$ 表示系统的特征多项式,为 $p(s)=Js^2+(B+k_v)s+k_p$,系统的跟踪误差得到为

$$e(s)=\theta_d(s)-\theta(s)=\frac{Js^2+Bs}{p(s)}\theta_d(s)+\frac{1}{p(s)}\tau_d(s) \tag{8.36}$$

对于阶跃输入和常量扰动,即

$$\theta_d(s)=\frac{\theta_d}{s},\tau_d(s)=\frac{\tau_d}{s} \tag{8.37}$$

系统稳态误差 e_{ss} 为

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}se(s)=\frac{\tau_d}{k_p} \tag{8.38}$$

比例增益 k_p 增大也可以减小稳态误差,但 k_p 不能任意增加到任何值,过高的比例增益会引起系统的振荡。

8.3.5　PID 控制器

在 PD 控制中,增加一个积分项,其控制方法变为

$$u(s)=\left(k_p+k_v s+\frac{k_i}{s}\right)[\theta_d(s)-\theta(s)] \tag{8.39}$$

式中,k_i 为积分增益,式(8.39)为众所周知的 PID 控制方法,控制框图如图 8.16 所示。PID 控制能使稳态误差为零,但积分增益 k_i 选择过大,控制系统也会不稳定。当 $\tau_d=0$ 时,系统闭环传递函数为

$$\frac{\theta(s)}{\theta_d(s)}=\frac{k_v s^2+k_p s+k_i}{Js^3+(B+k_v)s^2+k_p s+k_i} \tag{8.40}$$

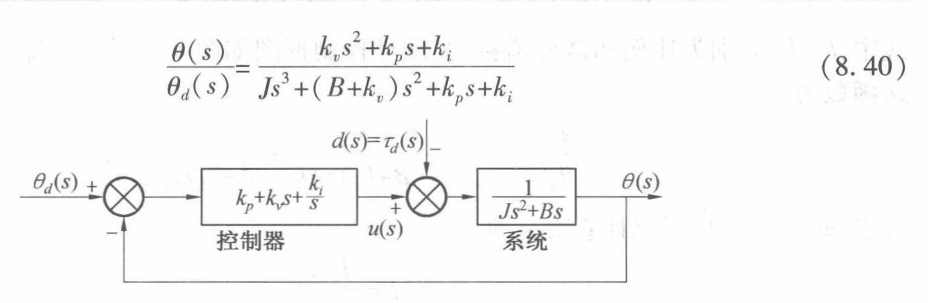


图 8.16 PID 独立关节控制原理框图

系统的特征多项式为 $p(s)=Js^3+(B+k_v)s^2+k_p s+k_i$，为三阶系统，应用 Routh-Hurwitz 稳定判断方法，上述闭环系统稳定需要满足以下条件：

$$k_i<\frac{(B+k_v)k_p}{J} \tag{8.41}$$

与式(8.35)类似，系统的输入-输出为

$$\theta(s)=\frac{k_v s^2+k_p s+k_i}{p(s)}\theta_d(s)-\frac{s}{p(s)}\tau_d(s) \tag{8.42}$$

跟踪误差为

$$e(s)=\frac{Js^3+Bs^2}{p(s)}\theta_d(s)+\frac{s}{p(s)}\tau_d(s) \tag{8.43}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}se(s)=0 \tag{8.44}$$

PID 控制方法能控制各个关节在外部扰动力存在时，运动到期望的位置。

8.3.6 PID 控制器增益的选择

PID 控制中重要的问题是参数 k_p,k_v,k_i 的选择，k_i 的大小必须满足稳定的约束条件，因此在系统设计初始，可以先令 $k_i=0$，首先合理选择比例增益和微分增益，满足系统的瞬时特性，如系统上升时间、调节时间以及超调量。在式(8.34)中，参数 k_p,k_v 表示为

$$\begin{aligned} k_p&=\omega_n^2 J \\ k_v&=2\zeta\omega_n J-B \end{aligned} \tag{8.45}$$

通过式(8.45)可以知道，ω_n 在控制系统中占据主要地位，但其设定也要符合约束条件。尽管机械臂关节质量大，但也具有一定的柔性，因此在选择 ω_n 时，驱动关节的关节柔性也是一个考虑的因素，假设 k_r 为关节有效的刚度，则关节一阶响应频率表示为 $\omega_r=\sqrt{k_r/J}$，为了避免共振，在工程实践中，一般应符合下列约束条件：

$$\omega_n\leqslant\omega_r/2 \tag{8.46}$$

系统中 J 随着机械臂的位形发生变化，可以取最大值。一旦控制系统中 ω_n 确定，机械臂控制中阻尼比一般选为临界阻尼，即 $\zeta=1$。当 k_p,k_v 调整好时，k_i 可以在符合约束条件的范围内选择，并且可以消除稳态误差，但不合理的选择可能使系统瞬态响应变差。三个参数对系统的定性影响见表 8.3。

表 8.3　增益对系统定性的影响

闭环系统响应	上升时间	调整时间	超调量	稳态误差
k_p	减少	不显著	增加	降低
k_v	不显著	减少	降低	不显著
k_i	减少	增加	增加	消除

8.3.7　前馈控制

如果系统输入量或外部扰动输入量是可测量和可控制的,系统可以采用前馈控制方法,以克服时变的输入或外部扰动输入所引起的输出量较大的波动,其控制框图如图8.17所示,假定 $r(t)$ 是任意的参考输入,$G(s)$ 表示受控对象传递函数,$H(s)$ 表示控制器传递函数,$F(s)$ 表示前馈控制传递函数。在图 8.17 中,三个传递函数 $G(s)$,$H(s)$ 和 $F(s)$ 表示成如下多项式的比例函数:

$$G(s)=\frac{q(s)}{p(s)},H(s)=\frac{c(s)}{d(s)},F(s)=\frac{a(s)}{b(s)} \tag{8.47}$$

则闭环输入输出的传递函数为

$$\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{F(s)G(s)+H(s)G(s)}{1+H(s)G(s)}=\frac{q(s)[c(s)b(s)+a(s)d(s)]}{b(s)[p(s)d(s)+q(s)c(s)]} \tag{8.48}$$

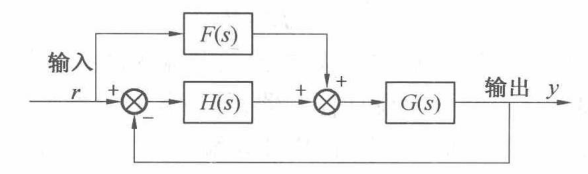


图 8.17　无扰动前馈控制原理框图

如果选择前馈控制传递函数为

$$F(s)=\frac{1}{G(s)} \tag{8.49}$$

即 $a(s)=p(s)$,$b(s)=q(s)$,而后式(8.48)变为

$$\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{c(s)q(s)+p(s)d(s)}{p(s)d(s)+q(s)c(s)} \tag{8.50}$$

系统的跟踪误差为

$$e(s)=r(s)-y(s)=0$$

由上式可以看出,采用前馈控制,在系统无外部扰动输入下,其跟踪误差为零,与 $H(s)$ 参数无关。

如果外部有扰动的输入,控制框图如图 8.18 所示。

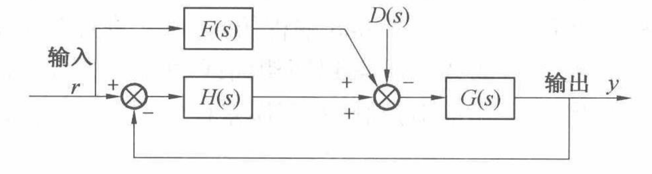


图 8.18　有扰动前馈控制原理框图

系统的跟踪误差为

$$e(s)=r(s)-y(s)=\frac{q(s)d(s)}{p(s)d(s)+q(s)c(s)}D(s) \tag{8.51}$$

图8.16所示控制系统，如果引入前馈控制，其控制框图如图8.19所示，跟踪误差为

$$e(s)=\theta_d(s)-\theta(s)=\frac{1}{Js^2+(B+k_v)s+k_p}\tau_d(s) \tag{8.52}$$

稳态误差为

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} se(s)=\frac{\tau_d}{k_p} \tag{8.53}$$

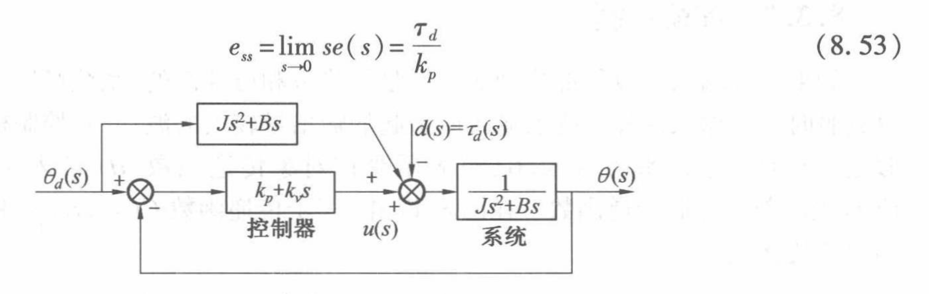


图8.19 PD+前馈独立关节控制原理图

【例8.2】 利用Matlab软件进行独立关节控制方法仿真。假定被控的单关节包含直流电机、轮系及机械臂，最终建模所得到的等效模型为

$$G(s)=\frac{1}{Js^2+Bs}$$

式中，等效的参数为$J=0.006\,7$，$B=0.10$。如果此关节输入的指令信号为$q^d=0.5\sin(2\pi t)$，外部扰动为$\tau_d=1$，采用PID控制方法设计控制器，其中各增益参数为$k_p=20.0$，$k_v=0.5$，$k_i=300$，系统的控制框图如图8.20所示。利用Matlab编程仿真，画出在此控制方法控制下，关节期望位置q_d和实际位置q曲线以及跟踪误差e曲线，仿真程序见附录E。

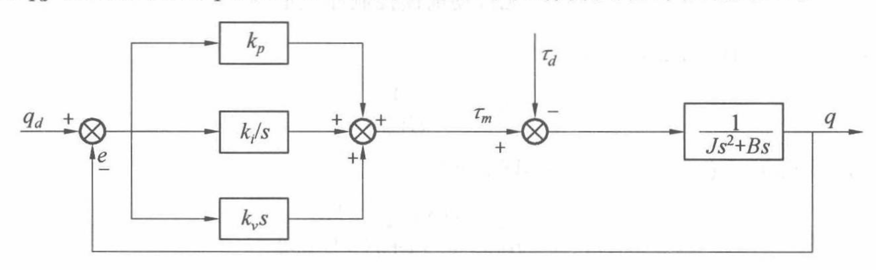


图8.20 PID控制原理图

所得到期望曲线、实际曲线以及跟踪误差曲线如图8.21所示。从图8.21可以看出，采用PID控制，在外部扰动存在的前提下，系统可以较好地跟踪期望的输入，但其跟踪误差随期望轨迹的变化而波动。

【例8.3】 如果采用PD加前馈控制方法设计控制器，其中比例、微分增益参数不变，系统的控制框图如图8.22所示。利用Matlab编程仿真，画出在此控制方法下，关节期望位置、实际位置曲线以及跟踪误差曲线。所得到期望曲线、实际曲线以及跟踪误差曲线如图8.23所示。从图中可以看出，采用前馈控制，跟踪误差稳定后，大小不受期望轨迹变化的影响。

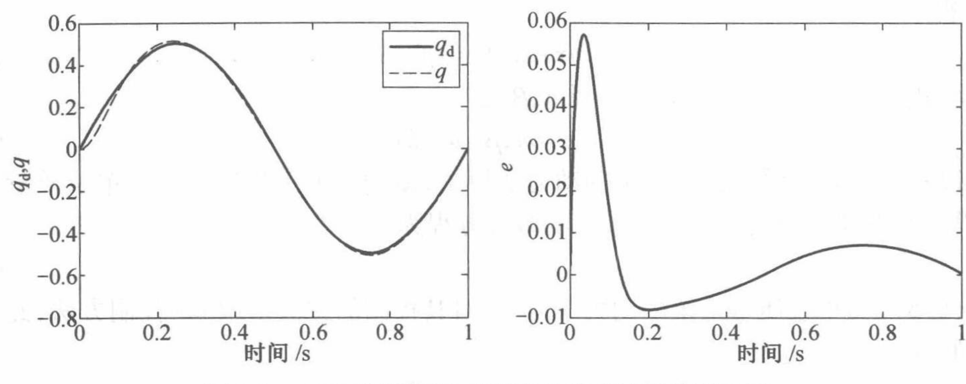


图 8.21　PID 控制期望、实际位置曲线及跟踪误差图

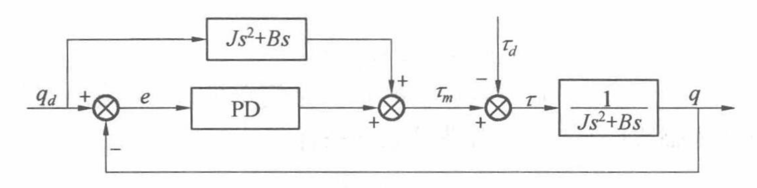


图 8.22　PD+前馈控制原理图

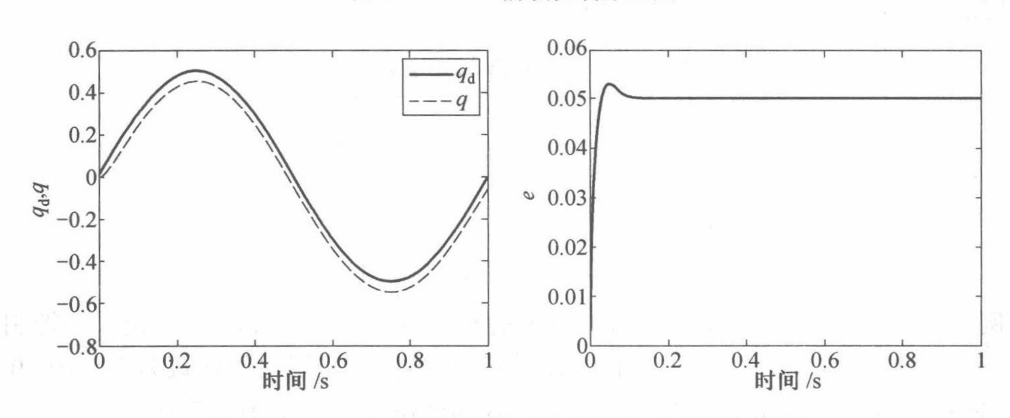


图 8.23　PD+前馈控制期望、实际位置曲线及跟踪误差图

8.4　动态控制

8.4.1　控制分解法

独立关节控制属于运动控制的范畴，方法只关注对单个关节的控制，虽然在模型建立过程中涉及了机械臂动力学方程，但其控制方法不依赖控制对象的动力学模型，从现在开始对于如图 8.2 所示的系统控制稍微做修改，其控制方法的组成依赖于控制对象和伺服系统两部分，其结果是控制对象的动力学参数 m,b,k 出现在控制方法模型部分中，但伺服部分并不依赖于这些参数，这种方法也称控制分解方法（Control Law Partitioning）。在式（8.5）中，f 重新表达为

$$f=\alpha f'+\beta \tag{8.54}$$

式中，α,β 是函数或常量，此时对于系统而言，f' 成为系统新的输入，将式（8.54）代入式

(8.5),得

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=\alpha f'+\beta \tag{8.55}$$

比较式(8.55)左右两侧,如果选择 α,β 为

$$\alpha=m,\beta=b\dot{x}+kx \tag{8.56}$$

可以看出 α,β 依赖于控制对象的动力学模型,新输入 f' 只是作为一个单位质量系统的输入,没有摩擦项,也没有刚度项,系统的微分方程为

$$\ddot{x}=f' \tag{8.57}$$

式(8.57)为单位质量系统的动力学方程,对其控制的方法采用 PD 控制方法,此部分为伺服控制部分,表示为

$$f'=-k_p x-k_v\dot{x} \tag{8.58}$$

将式(8.58)代入式(8.57),得

$$\ddot{x}+k_v\dot{x}+k_p x=0 \tag{8.59}$$

显然,对单位质量系统的控制,参数 k_p,k_v 选择是简单的,不依赖于控制对象的参数,当伺服系统的阻尼选为临界阻尼时,仅需满足如下条件:

$$k_v=2\sqrt{k_p}$$

其控制分解原理框图如图 8.24 所示

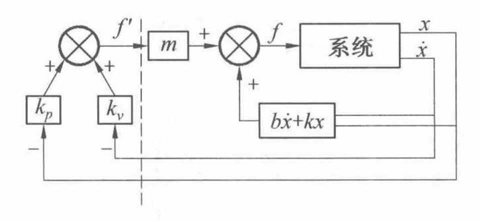


图 8.24 控制分解原理框图

【例 8.4】 如图 8.2 所示,如果控制对象的参数为 $m=1,b=1,k=1$,假定采用控制分解方法对系统进行控制,使其稳定于静心位置,如果系统伺服控制比例增益为 $k_p=16$,并且为临界阻尼系统 $\zeta=1$,试求此时控制系统内部 α,β 和增益参数 k_v 的值或表达式。

依据式(8.56),得

$$\alpha=1,\beta=\dot{x}+x$$

系统为临界阻尼,则

$$k_v=2\sqrt{k_p}=8$$

图 8.24 所示系统仅仅让质量块保持在稳定的状态。如果要求图 8.2 所示的质量块在力的作用下能跟踪一条轨迹线,此轨迹用时间函数 $x_d(t)$ 表示,代表质量块期望的位置,假定轨迹线平滑,存在 $\dot{x}_d(t),\ddot{x}_d(t)$,跟踪误差定义为 $e=x_d-x$,则跟踪此轨迹的伺服控制方法可以给定为

$$f'=\ddot{x}_d+k_v\dot{e}+k_p e \tag{8.60}$$

将式(8.60)代入式(8.57),得

$$\ddot{x}=\ddot{x}_d+k_v\dot{e}+k_p e \tag{8.61}$$

或者

$$\ddot{e}+k_v\dot{e}+k_p e=0 \tag{8.62}$$

式(8.62)为伺服控制系统在误差空间下的二阶线性微分方程,描述了与期望的轨迹对应的误差的发展。选择合理的增益 k_p,k_v,可以得出误差的任何响应。轨迹跟踪控制方法框图如图8.25所示。

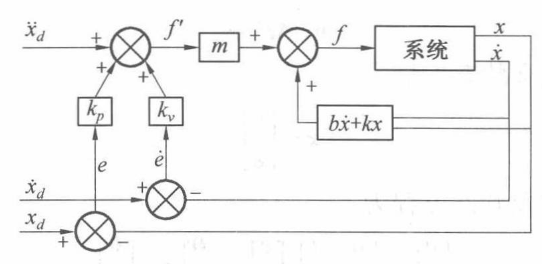


图8.25　一种质量块轨迹跟踪控制方法框图

8.4.2　机器人计算力矩控制法

机器人控制方法很多,但是大多数都是计算力矩控制方法(Computed-torque Controllers)的特例,计算力矩控制方法是非线性系统中线性反馈的一种具体应用。机器人控制方法也可以分为类计算力矩控制方法或者非计算力矩控制方法。类计算力矩控制方法也出现在鲁棒控制、自适应控制及其他控制方法中。n 自由度机器人动力学模型表示为

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{F}_v(\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{F}_d(\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})+\boldsymbol{\tau}_d=\boldsymbol{\tau} \tag{8.63}$$

简写为

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{N}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{\tau}_d=\boldsymbol{\tau} \tag{8.64}$$

式中,$\boldsymbol{F}_v(\dot{\boldsymbol{q}})$,$\boldsymbol{F}_d(\dot{\boldsymbol{q}})$表示黏性摩擦和干摩擦项。从控制的角度看问题,$\boldsymbol{q}$ 为机器人系统关节变量,为系统的输出;$\boldsymbol{\tau}$ 为作用于关节的力矩,为系统的输入;$\boldsymbol{\tau}_d$ 为系统的外部扰动,为系统的输入。利用上述提到的控制分解方法,假定控制器的输出为

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\tau}'+\boldsymbol{\beta} \tag{8.65}$$

式中,$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^{n\times 1}$,$\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$ 可以选为

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{M},\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{N} \tag{8.66}$$

将式(8.65)代入式(8.64),得

$$\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\tau}_d \tag{8.67}$$

如果控制器采用PD控制方法,相似于式(8.60)对单位质量系统控制,对单位惯性系统的控制为

$$\boldsymbol{\tau}'=\ddot{\boldsymbol{q}}_d+\boldsymbol{k}_v\dot{\boldsymbol{e}}+\boldsymbol{k}_p\boldsymbol{e} \tag{8.68}$$

式中,$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{q}_d-\boldsymbol{q}$,$\boldsymbol{k}_p$,$\boldsymbol{k}_v\in\mathbf{R}^{n\times n}$为对角矩阵。将式(8.68)代入式(8.67),得

$$\ddot{\boldsymbol{e}}+\boldsymbol{k}_v\dot{\boldsymbol{e}}+\boldsymbol{k}_p\boldsymbol{e}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\tau}_d \tag{8.69}$$

式(8.69)为对应于 n 个关节的 n 个解耦的关节跟踪误差微分方程,设置 $\boldsymbol{k}_p$,$\boldsymbol{k}_v$ 参数可以改变机器人系统每个关节的控制性能指标。如何要如公式(8.68)般给定新输入 $\boldsymbol{\tau}'$,需要简要说明的是,跟踪误差相对时间微分两次,得

$$\ddot{\boldsymbol{e}}=\ddot{\boldsymbol{q}}_d-\ddot{\boldsymbol{q}} \tag{8.70}$$

通过式(8.64)求解 $\ddot{\boldsymbol{q}}$ 并代入式(8.70),得

$$\ddot{\boldsymbol{e}}=\ddot{\boldsymbol{q}}_d+\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{\tau}_d-\boldsymbol{\tau}) \tag{8.71}$$

定义控制输入函数为

$$\boldsymbol{u}=\ddot{\boldsymbol{q}}_d+\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{\tau}) \tag{8.72}$$

扰动函数为

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\tau}_d \tag{8.73}$$

在跟踪误差空间,定义状态矢量为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}\\ \dot{\boldsymbol{e}}\end{bmatrix} \tag{8.74}$$

式中,$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^{2n\times1}$,则跟踪误差状态方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}\\ \dot{\boldsymbol{e}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}\\ \dot{\boldsymbol{e}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{w} \tag{8.75}$$

式(8.72)所表示的反馈线性化变换转化为

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{M}(\ddot{\boldsymbol{q}}_d-\boldsymbol{u})+\boldsymbol{N} \tag{8.76}$$

式(8.76)所表示的方法称为计算力矩控制方法。式(8.75)所代表的系统为线性的布鲁诺夫规范型(Brunovsky Canonical Form),系统的驱动为控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 和扰动输入 $\boldsymbol{w}(t)$。如果我们选择合理的控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$,可以使式(8.75)所表示的系统为稳定系统,即 $\boldsymbol{e}$ 趋向零。根据式(8.76),作用于关节上的非线性力 $\boldsymbol{\tau}(t)$,将驱动关节跟随期望的轨迹。将式(8.76)代入式(8.64),得

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{N}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{\tau}_d=\boldsymbol{M}(\ddot{\boldsymbol{q}}_d-\boldsymbol{u})+\boldsymbol{N} \tag{8.77}$$

进一步得

$$\ddot{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\tau}_d \tag{8.78}$$

式(8.76)所表示的计算力矩控制方法,如图 8.26 所示。

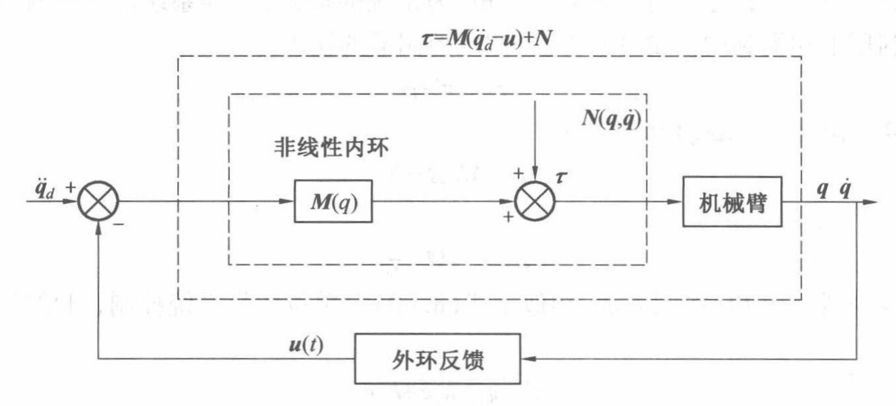


图 8.26 计算力矩控制方法

1. PD 外环设计

选择控制输入为 PD 线性反馈,表示为

$$\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{k}_v\dot{\boldsymbol{e}}-\boldsymbol{k}_p\boldsymbol{e} \tag{8.79}$$

作用于机械臂关节力的输入为

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})(\ddot{\boldsymbol{q}}_d+\boldsymbol{k}_v\dot{\boldsymbol{e}}+\boldsymbol{k}_p\boldsymbol{e})+\boldsymbol{N}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{8.80}$$

其 PD 计算力矩控制方法原理如图 8.27 所示。系统闭环的误差动力学方程为

$$\ddot{\boldsymbol{e}}+\boldsymbol{k}_v\dot{\boldsymbol{e}}+\boldsymbol{k}_p\boldsymbol{e}=\boldsymbol{w} \tag{8.81}$$

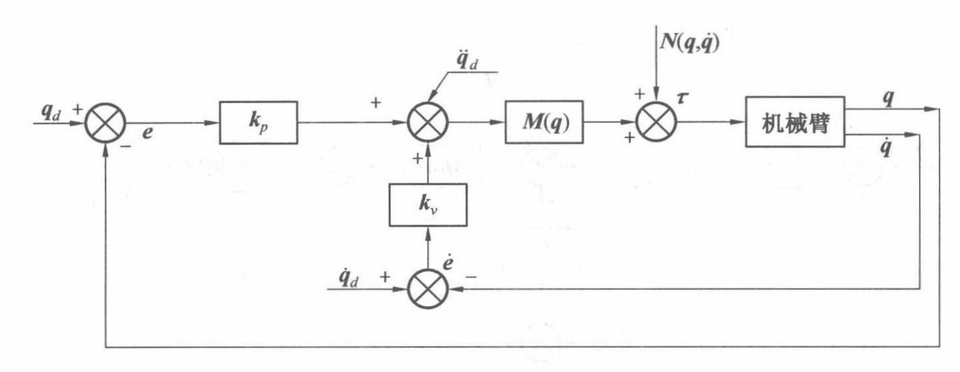


图 8.27　PD 计算力矩控制方法原理图

系统特征多项式为

$$\Delta_c(s)=|s^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{k}_v s+\boldsymbol{k}_p| \tag{8.82}$$

式中，$\boldsymbol{k}_p=\mathrm{diag}(k_{pi})$，$\boldsymbol{k}_v=\mathrm{diag}(k_{vi})$，得

$$\Delta_c(s)=\prod_{i=1}^{n}(s^2+k_{vi}s+k_{pi}) \tag{8.83}$$

在系统中，当 $\boldsymbol{w}$ 有界，合理选择 k_{vi}，k_{pi}能保证跟踪误差趋向稳定，当 $\boldsymbol{M}^{-1}$存在上限，$\boldsymbol{\tau}_d$ 有界时，则 $\boldsymbol{w}$ 有界。应该注意到，当外环设计时，PD 增益参数的矩阵 $\boldsymbol{k}_p$，$\boldsymbol{k}_v$在控制中是解耦的，但整体的关节控制却并不解耦，因为反馈信号 $\boldsymbol{u}$ 在内环需要乘以 $\boldsymbol{M}$ 并与非线性项 $\boldsymbol{N}$ 相加，二阶系统特征多项式的标准形式为

$$p(s)=s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2 \tag{8.84}$$

各个关节的跟踪误差的性能可以通过设置参数 k_{pi}，k_{vi}来调整，为

$$k_{pi}=\omega_n^2,k_{vi}=2\zeta\omega_n \tag{8.85}$$

一般而言，靠近末端的关节 ω_n 比离基座近的关节设置大一些，因为机械臂从基座开始各杆件的质量依次减少，末端关节响应应快一些。系统一般要求为临界阻尼，即 $\zeta=1$，此时

$$k_{pi}=\omega_n^2,k_{vi}=2\sqrt{k_{pi}} \tag{8.86}$$

控制系统固有频率 ω_n 的选择见 8.3.6 小节。

2. PID 外环设计

当外部无扰动时，PD 方案的控制是有效的，当存在外部扰动时，PD 控制的稳态误差非零，当采用 PID 控制方案时，外环控制输入为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=\boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{u}=-\boldsymbol{k}_v\dot{\boldsymbol{e}}-\boldsymbol{k}_p\boldsymbol{e}-\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{\varepsilon}\end{cases} \tag{8.87}$$

作用于机械臂关节力的输入为

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})(\ddot{\boldsymbol{q}}_d+\boldsymbol{k}_v\dot{\boldsymbol{e}}+\boldsymbol{k}_p\boldsymbol{e}+\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{\varepsilon})+\boldsymbol{N}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{8.88}$$

PID 计算力矩控制方法原理图如图 8.28 所示。

闭环误差动力学方程为

$$\ddot{\boldsymbol{e}}+\boldsymbol{k}_v\dot{\boldsymbol{e}}+\boldsymbol{k}_p\boldsymbol{e}+\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{w} \tag{8.89}$$

根据拉氏变换，系统变为

$$\boldsymbol{e}(s)=\frac{s}{s^3\boldsymbol{I}+\boldsymbol{k}_v s^2+\boldsymbol{k}_p s+\boldsymbol{k}_i}\boldsymbol{w}(s) \tag{8.90}$$

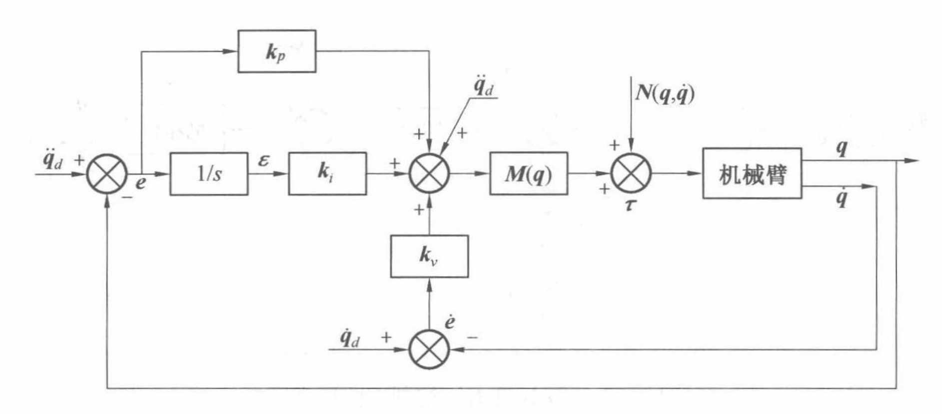


图 8.28 PID 计算力矩控制方法原理图

闭环特征多项式为

$$\Delta_c(s)=|s^2I+\boldsymbol{k}_v s+\boldsymbol{k}_p+\boldsymbol{k}_i| \tag{8.91}$$

式中,$\boldsymbol{k}_p$,$\boldsymbol{k}_v$,$\boldsymbol{k}_i$ 为对角矩阵。式(8.91)最终得

$$\Delta_c(s)=\prod_{i=1}^{n}(s^2+k_{vi}s+k_{pi}+k_{ii}) \tag{8.92}$$

使用 Routh-Hurwitz 判据,系统稳定的须满足的条件为

$$k_{ii}<k_{vi}k_{pi} \tag{8.93}$$

【例 8.5】 2R 机械臂 PD 计算力矩控制方法仿真,图 8.29 所示 2R 机械臂,各物理参数如图所示,假定杆件质量集中于各杆的末端,所建立的动力学方程为

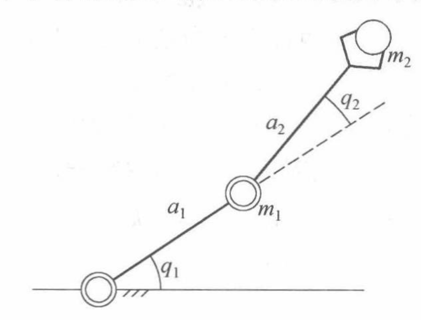


图 8.29 2R 机械臂杆件质量集中各杆末端

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{\tau}$$

式中

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}(m_1+m_2)a_1^2+m_2a_2^2+2m_2a_1a_2c_2 & m_2a_2^2+m_2a_1a_2c_2\\ m_2a_2^2+m_2a_1a_2c_2 & m_2a_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}-m_2a_1a_2(2\dot{q}_1\dot{q}_2+\dot{q}_2^2)s_2\\ m_2a_1a_2\dot{q}_1^2s_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}(m_1+m_2)ga_1c_1+m_2ga_2c_{12}\\ m_2ga_2c_{12}\end{bmatrix},\boldsymbol{\tau}=\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix}$$

(1) PD 计算力矩控制方法。

如果采用 PD 计算力矩控制方法,$\boldsymbol{\tau}$ 给定为

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})(\ddot{\boldsymbol{q}}_d+\boldsymbol{k}_v\dot{\boldsymbol{e}}+\boldsymbol{k}_p\boldsymbol{e})+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})$$

(2) 期望的轨迹。

关节 1、关节 2 期望的轨迹 $\boldsymbol{q}_d$ 给定为

$$q_{1d}=g_1\sin(2\pi t/T)$$
$$q_{2d}=g_2\cos(2\pi t/T)$$

式中，$T=2$ s，$g_i=0.1$ rad。为了保证良好的跟踪性能，选择闭环系统的时间常数（Time Constant）为 0.1 s，并且系统为临界阻尼，则各驱动关节 k_{pi}，k_{vi} 为

$$\omega_n=1/0.1=10$$
$$k_{pi}=\omega_n{}^2=100$$
$$k_{vi}=2\omega_n=20$$

(3) Matlab 编程仿真。

在上述参数已知的前提下，假设无外部扰动，状态变量定义为 $\boldsymbol{x}=[q_1\ q_2\ \dot{q}_1\ \dot{q}_2]^{\mathrm{T}}$，初始值为 $\boldsymbol{x}_0=[0.1\ 0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$，通过 Matlab 程序，实现在此控制方法下，关节实际的位置，跟踪误差以及作用于各关节上的力矩的仿真，仿真结果如图 8.30 所示，仿真程序见附录 F。

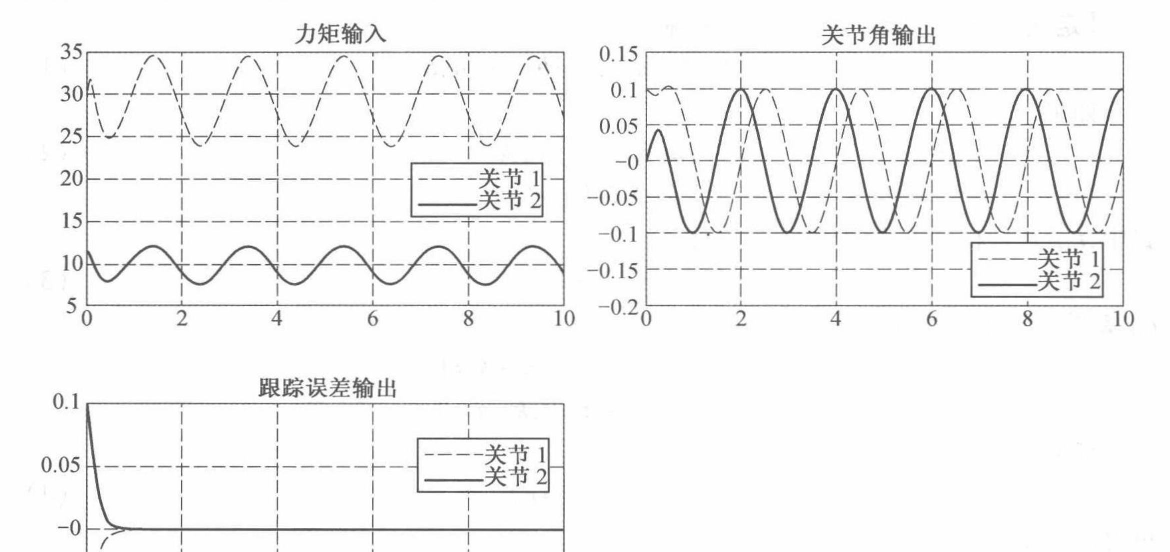


图 8.30　2R 机械臂 PD 计算力矩控制仿真图

本章小结

本章从一般的二阶线性系统入手，阐述了控制系统相关的基本概念，重点讨论了机械臂的独立关节控制与计算力矩控制两种方法，涉及了直流电机模型建立，并进一步建立了电机-轮系-机械臂耦合的控制系统，并采用了 PD，PID 方法以及前馈控制方法，基于所建立的模型进行了控制仿真；详细阐述了计算力矩控制方法的原理，并基于此方法，对 2R 机械臂进行了控制仿真，直观感受到控制方法不同之处，使读者理解这些控制方法，可以以此为基础学习更加深奥的控制方法，并运用到实际工程中去。

附　　录

附录 A　数学基础

附 A.1　矢量代数

1. 矢量点乘(Dot Product of Vectors)

【定义 A.1】　矢量 $\boldsymbol{a}$ 和矢量 $\boldsymbol{b}$ 点乘为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \tag{1}$$

如果

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{b}&=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{2}$$

式中,$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ 是相互垂直的单位矢量,得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \tag{3}$$

$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ 符合以下约束条件:

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

任何一个矢量可以表示为

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{4}$$

也可以表示为

$$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{j}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k} \tag{5}$$

式中,$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{i}=v_x$,其他同式(1)。

如果矢量 $\boldsymbol{a}$ 和矢量 $\boldsymbol{b}$ 以矩阵形式表示

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix} \tag{6}$$

则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \tag{7}$$

2. 矢量叉乘(Cross Product of Vectors)

【定义 A.2】　矢量 $\boldsymbol{a}$ 和矢量 $\boldsymbol{b}$ 叉乘为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{n} \tag{8}$$

式中,$\boldsymbol{n}$ 是一个单位矢量,其方向按照右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转动$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$角到 $\boldsymbol{b}$,拇指所指方向,同时垂直矢量 $\boldsymbol{a}$ 和矢量 $\boldsymbol{b}$。$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 运算可以表示为以下行列式形式:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{bmatrix}\tag{9}$$

计算得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{bmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=$$

$$(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}\tag{10}$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 和矢量 $\boldsymbol{b}$ 以列矩阵表示，即

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_x\\ b_y\\ b_z\end{bmatrix}\tag{11}$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 和矢量 $\boldsymbol{b}$ 叉乘可以表示为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\hat{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}\tag{12}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{a}}\equiv\boldsymbol{a}\times$，是由矢量 $\boldsymbol{a}$ 构造而成的斜对称矩阵。

$$\boldsymbol{c}=\hat{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0 & -a_z & a_y\\ a_z & 0 & -a_x\\ -a_y & a_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_x\\ b_y\\ b_z\end{bmatrix}\tag{13}$$

【定义 A.3】 三个矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的标量三重积（Scalar Triple Product of Three Vectors）为

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{bmatrix}\tag{14}$$

【定义 A.4】 三个矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 矢量三重积（Vector Triple Product of Three Vectors）为

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}\tag{15}$$

3. 矢量的正交分解（Orthogonal Decomposition）

如图 A.1 所示，对于一个矢量 $\boldsymbol{v}$ 进行正交分解为两个分量，分别平行和垂直于单位矢量 $\boldsymbol{e}$。平行于单位矢量 $\boldsymbol{e}$ 的分量 $\boldsymbol{v}_{/\!/}$ 称为轴向分量（Axial Component），表示为

$$\boldsymbol{v}_{/\!/}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v})=\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\tag{16}$$

垂直于 $\boldsymbol{e}$ 的法向分量 $\boldsymbol{v}_{\perp}$（Normal Component），表示为

$$\boldsymbol{v}_{\perp}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{/\!/}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{v}\tag{17}$$

也可以表示为

$$\boldsymbol{v}_{\perp}=\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{e})=(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{e}\tag{18}$$

经化简与公式(17)一致。

附 A.2　四元数代数

二维平面的旋转可以用复数来表达，三维空间中的旋转可以用四元数来表示，用四元数

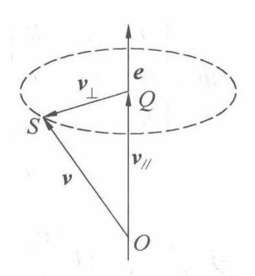


图 A.1 矢量的正交分解

表示三维的旋转与使用旋转矩阵相比具有两个优点:①几何意义明确;②计算简单。此外,四元数代数还涵盖了矢量代数、实数、复数和矢量都可以看作是四元数的特例。四元数是将三维矢量代数推广到乘法和除法运算的必要性而产生的,四元数由一个实数单位和三个虚数单位 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 组成,通常把四元数写为一个矢量,其一般形式为

$$\boldsymbol{q}=q_0+q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k} \tag{19}$$

式中,q_0,q_1,q_2,q_3 均为实数,$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 服从以下运算规律,如图 A.2 所示,顺时针相乘为正,逆时针为负,即

$$\begin{cases}\boldsymbol{ij}=\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{ji}\\ \boldsymbol{jk}=\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{kj}\\ \boldsymbol{ki}=\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{ik}\\ \boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=-1\end{cases} \tag{20}$$

可以看出,如果 $q_1=q_2=q_3=0$,则四元数退化为实数;如果 $q_2=q_3=0$,则四元数退化为复数,所以称四元数为超复数。将四元数分为标量部分 q_0 和矢量部分 $\boldsymbol{q}_v$ 组成,可以写为

$$\boldsymbol{q}=q_0+\boldsymbol{q}_v \tag{21}$$

式中,$\boldsymbol{q}_v=q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}$,或者写成列矩阵的形式为

$$\boldsymbol{q}=[q_0\quad \boldsymbol{q}_v]^{\mathrm{T}}=[q_0\quad q_1\quad q_2\quad q_3]^{\mathrm{T}}$$

图 A.2 乘法顺序图

1. 四元素运算(加法和乘法)和性质

(1)加法。

任取两个四元数

$$\begin{cases}\boldsymbol{q}=q_0+q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{p}=p_0+p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k}\end{cases} \tag{22}$$

则

$$\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}=(q_0+p_0)+(q_1+p_1)\boldsymbol{i}+(q_2+p_2)j+(q_3+p_3)\boldsymbol{k} \tag{23}$$

可以看出,任意两个四元数相加仍为四元数,且可以证明四元数加法满足交换律和结合律。

（2）乘法。

两个四元数的乘法按多项式乘法进行，可以把这种乘法叫作直乘。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{qp}=&(q_0+q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k})(p_0+p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k})=\\&[q_0p_0-(q_1p_1+q_2p_2+q_3p_3)]+\\&[q_0p_1+q_1p_0+(q_2p_3-q_3p_2)]\boldsymbol{i}+\\&[q_0p_2+q_2p_0+(q_3p_1-q_1p_3)]\boldsymbol{j}+\\&[q_0p_3+q_3p_0+(q_1p_2-q_2p_1)]\boldsymbol{k}\end{aligned}\tag{24}$$

四元数乘四元数仍为四元数，四元数乘法以符号“ * ”表示。为了运算方便，四元数乘法可以有以下两种表示方式

①借用矢量运算符号表示法。

设$\begin{cases}\boldsymbol{q}=q_0+\boldsymbol{q}_v\\\boldsymbol{p}=p_0+\boldsymbol{p}_v\end{cases}$，则

$$\boldsymbol{q}*\boldsymbol{p}=(q_0+\boldsymbol{q}_v)*(p_0+\boldsymbol{p}_v)=q_0p_0+q_0\boldsymbol{p}_v+p_0\boldsymbol{q}_v+\boldsymbol{q}_v\boldsymbol{p}_v\tag{25}$$

式中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}_v\boldsymbol{p}_v=&(q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k})(p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k})=\\&-(q_1p_1+q_2p_2+q_3p_3)+\\&(q_2p_3-q_3p_2)\boldsymbol{i}+(q_3p_1-q_1p_3)\boldsymbol{j}+(q_1p_2-q_2p_1)\boldsymbol{k}=\\&-\boldsymbol{q}_v\cdot\boldsymbol{p}_v+(\boldsymbol{q}_v\times\boldsymbol{p}_v)\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{q}*\boldsymbol{p}=(q_0+\boldsymbol{q}_v)*(p_0+\boldsymbol{p}_v)=q_0p_0-\boldsymbol{q}_v\cdot\boldsymbol{p}_v+q_0\boldsymbol{p}_v+p_0\boldsymbol{q}_v+(\boldsymbol{q}_v\times\boldsymbol{p}_v)\tag{26}$$

由于$(\boldsymbol{q}_v\times\boldsymbol{p}_v)\neq(\boldsymbol{p}_v\times\boldsymbol{q}_v)$，所以$\boldsymbol{q}*\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}$，即四元数法不符合交换律，但可以证明它满足结合律和分配律。可将矢量部分的点乘和叉乘表示为直乘的组合为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}_v\cdot\boldsymbol{p}_v&=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{q}_v*\boldsymbol{p}_v+\boldsymbol{p}_v*\boldsymbol{q}_v)\\\boldsymbol{q}_v\times\boldsymbol{p}_v&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{q}_v*\boldsymbol{p}_v-\boldsymbol{p}_v*\boldsymbol{q}_v)\end{aligned}\tag{27}$$

根据式(27)，得出如下结论：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{q}_v\perp\boldsymbol{p}_v\Leftrightarrow\boldsymbol{q}_v\cdot\boldsymbol{p}_v=0\Leftrightarrow\boldsymbol{q}_v*\boldsymbol{p}_v+\boldsymbol{p}_v*\boldsymbol{q}_v=0\\&\boldsymbol{q}_v\parallel\boldsymbol{p}_v\Leftrightarrow\boldsymbol{q}_v\times\boldsymbol{p}_v=0\Leftrightarrow\boldsymbol{q}_v*\boldsymbol{p}_v-\boldsymbol{p}_v*\boldsymbol{q}_v=0\end{aligned}\tag{28}$$

可见，仅当两个矢量平行或垂直时，它们的乘积才能对易或者反对易，而在一般情况下是不符合交换律的。

②矩阵表示法。

将四元数写成四维矢量形式

$$\boldsymbol{q}=[q_0\quad q_1\quad q_2\quad q_3]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{p}=[p_0\quad p_1\quad p_2\quad p_3]^{\mathrm{T}}$$

则

$$\boldsymbol{q}*\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}q_0&-q_1&-q_2&-q_3\\q_1&q_0&-q_3&q_2\\q_2&q_3&q_0&-q_1\\q_3&-q_2&q_1&q_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_0\\p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix}\tag{29}$$

(3)单元、零元和负四元数。

单元为

$$\boldsymbol{I}=1+0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}$$

零元为

$$\boldsymbol{0}=0+0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}$$

负数为

$$-\boldsymbol{q}=-q_0-q_1\boldsymbol{i}-q_2\boldsymbol{j}-q_3\boldsymbol{k}$$

(4)逆元。

四元数逆元以 $\boldsymbol{q}^{-1}$ 表示,即

$$\boldsymbol{q}^{-1}=\frac{1}{q_0+q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}}=\frac{(q_0-q_1\boldsymbol{i}-q_2\boldsymbol{j}-q_3\boldsymbol{k})}{(q_0+q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k})(q_0-q_1\boldsymbol{i}-q_2\boldsymbol{j}-q_3\boldsymbol{k})}=\frac{q_0-q_1\boldsymbol{i}-q_2\boldsymbol{j}-q_3\boldsymbol{k}}{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}=\frac{\boldsymbol{q}^*}{N^2(\boldsymbol{q})} \tag{30}$$

式中,$\boldsymbol{q}^*=q_0-q_1\boldsymbol{i}-q_2\boldsymbol{j}-q_3\boldsymbol{k}$,称为四元数 $\boldsymbol{q}$ 的共轭四元数;$N^2(\boldsymbol{q})=\|\boldsymbol{q}\|=q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2$ 称为四元数的范数,$N(\boldsymbol{q})=|\boldsymbol{q}|=\sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}$ 表示四元数的模。若 $N(\boldsymbol{q})=1$,则

$$\boldsymbol{q}^{-1}=\boldsymbol{q}^* \tag{31}$$

即逆元素等于共轭元素,四元数是正规的。

(5)除法。

由于乘法不可交换,故除法分为左除和右除。

例如,$\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}$ 为三个四元数,即

$$\boldsymbol{q}*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p},\text{则 }\boldsymbol{x}=\boldsymbol{q}^{-1}*\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{x}*\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p},\text{则 }\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}^{-1}$$

因为 $\boldsymbol{q}^{-1}*\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}^{-1}$,故两个 $\boldsymbol{x}$ 是不相等的。

(6)四元数的性质。

①诸四元数之和的共轭四元数等于共轭四元数之和,即

$$(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}+\boldsymbol{x})^*=\boldsymbol{q}^*+\boldsymbol{p}^*+\boldsymbol{x}^* \tag{32}$$

②诸四元数之积的共轭四元数等于其共轭四元数以相反顺序相乘之积,即

$$(\boldsymbol{q}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{x})^*=\boldsymbol{x}^**\boldsymbol{p}^**\boldsymbol{q}^* \tag{33}$$

③诸四元数之积的范数等于其因子的范数之积,即

$$\|\boldsymbol{q}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{q}\|\,\|\boldsymbol{p}\|\,\|\boldsymbol{x}\| \tag{34}$$

④诸四元数之积的逆,即

$$(\boldsymbol{q}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{x})^{-1}=\boldsymbol{x}^{-1}*\boldsymbol{p}^{-1}*\boldsymbol{q}^{-1} \tag{35}$$

⑤诸四元数相乘,当其因子循环置换时,四元数乘积的标量部分不变,即

$$\mathrm{Scal}(\boldsymbol{q}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{x})=\mathrm{Scal}(\boldsymbol{x}*\boldsymbol{q}*\boldsymbol{p}) \tag{36}$$

⑥非循环置换时,标量部分不相等。

2. 四元数的几何意义和三角表达式

考虑矢量的转动,设矢量 $\boldsymbol{p}$ 旋转 θ 角变成矢量 $\boldsymbol{p}'$,$|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}'|=r$;设垂直于 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'$ 所在平面的转动轴矢量为 $\boldsymbol{e}$,转动方向与转轴方向遵循右手定则,如图 A. 3 所示。因为

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}'=r^2\cos\theta$$

$$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}'=r^2\sin\theta\boldsymbol{e}$$

从而

$$\boldsymbol{p}' * \boldsymbol{p} = -\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p} = -r^2 \cos\theta - r^2 \sin\theta \boldsymbol{e}$$

进而

$$\boldsymbol{p}' = (-r^2 \cos\theta - r^2 \sin\theta \boldsymbol{e}) * \boldsymbol{p}^{-1} \tag{37}$$

根据式(30),得

$$\boldsymbol{p}^{-1} = \frac{1}{r^2}\boldsymbol{p}^* = \frac{-\boldsymbol{p}}{r^2} \tag{38}$$

将式(38)代入式(37),得

$$\boldsymbol{p}' = (\cos\theta + \sin\theta \boldsymbol{e}) * \boldsymbol{p} \tag{39}$$

由此可见,形如 $\cos\theta+\sin\theta\boldsymbol{e}$ 的四元数表示一个旋转:以 $\boldsymbol{e}$ 为转轴,使垂直于转轴平面内的一个矢量按照右手螺旋方向转过 θ 角。当 $\boldsymbol{p}$ 反向旋转时,定义角度为负值,把 $-\theta$ 代入式 $\cos\theta+\sin\theta\boldsymbol{e}$ 中得到 $\cos\theta+\sin\theta(-\boldsymbol{e})$,相当于转轴反向,这与实际相符合,而且这两种旋转互逆,连续实施此两个旋转相当于没转,这与 $\cos\theta+\sin\theta\boldsymbol{e}$ 与 $\cos\theta+\sin\theta(-\boldsymbol{e})$ 乘积为 1 相符。利用式(39)可以方便实施一个旋转,把表示旋转的四元数左乘到与 $\boldsymbol{e}$ 垂直的矢量上即可。

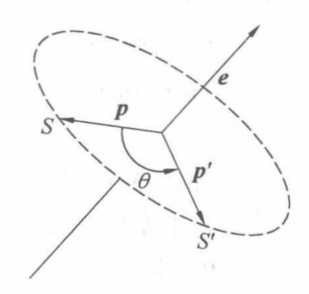


图 A.3　四元数的几何意义

对任意的一个四元数 $\boldsymbol{q}=q_0+\boldsymbol{q}_v$,令 $\rho=|\boldsymbol{q}_v|=\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}$,$\boldsymbol{q}_v=\rho\boldsymbol{e}$,$\boldsymbol{e}$ 为 $\boldsymbol{q}_v$ 的单位矢量,即由 $\boldsymbol{q}_v$ 方向余弦组成的矢量。

$$N(\boldsymbol{q}) = |\boldsymbol{q}| = \sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2} = \sqrt{q_0^2+\rho^2} \tag{40}$$

利用三角替代法

$$\cos\theta = \frac{q_0}{|\boldsymbol{q}|}, \sin\theta = \frac{\rho}{|\boldsymbol{q}|}$$

有

$$\boldsymbol{q} = q_0 + \boldsymbol{q}_v = |\boldsymbol{q}|(\cos\theta + \sin\theta \boldsymbol{e}) \tag{41}$$

可见,任意一个四元数也表示一个旋转,它使矢量旋转的同时还使矢量的大小变为原来的 $|\boldsymbol{q}|$ 倍,这就是四元数的几何意义。

3. 一般矢量旋转的四元数表示

首先令

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{q} * \boldsymbol{p} * \boldsymbol{q}^{-1} \tag{42}$$

式(42)的变换称为四元数的旋转变换,如果令

$$\boldsymbol{p} = p_0 + \boldsymbol{p}_v = p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{p}' = p'_0 + \boldsymbol{p}'_v = p'_0 + p'_1\boldsymbol{i} + p'_2\boldsymbol{j} + p'_3\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{q}=q_0+q_1\boldsymbol{i}+q_2 j+q_3\boldsymbol{k}$$

利用旋转变换式(42),可以得到$\boldsymbol{p}'$与$\boldsymbol{p}$各分量之间的关系为

$$\begin{cases} p'_0=p_0 \\ p'_1=\dfrac{q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2}{\|\boldsymbol{q}\|}p_1+\dfrac{2(q_1q_2-q_0q_3)}{\|\boldsymbol{q}\|}p_2+\dfrac{2(q_1q_3+q_0q_2)}{\|\boldsymbol{q}\|}p_3 \\ p'_2=\dfrac{2(q_1q_2+q_0q_3)}{\|\boldsymbol{q}\|}p_1+\dfrac{q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2}{\|\boldsymbol{q}\|}p_2+\dfrac{2(q_2q_3-q_0q_1)}{\|\boldsymbol{q}\|}p_3 \\ p'_3=\dfrac{2(q_1q_3-q_0q_2)}{\|\boldsymbol{q}\|}p_1+\dfrac{2(q_2q_3+q_0q_1)}{\|\boldsymbol{q}\|}p_2+\dfrac{q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2}{\|\boldsymbol{q}\|}p_3 \end{cases} \tag{43}$$

当旋转变换四元数是规范四元数时,$\|\boldsymbol{q}\|=1$,可以用共轭四元数来替代逆四元数。此时

$$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{q}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}^* \tag{44}$$

则两个四元数$\boldsymbol{p}'$与$\boldsymbol{p}$矢量部分的关系可以用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \tag{45}$$

形式如$\boldsymbol{q}*(\ )*\boldsymbol{q}^*$称为旋转算子。

考虑一般的绕指定方向轴线的旋转,如图 A.4 所示,矢量$\boldsymbol{p}$绕过O以单位向量$\boldsymbol{e}$为方向的直线旋转θ角到达$\boldsymbol{p}'$,由于向量的平移不变性,轴线不必固定过点O。矢量$\boldsymbol{p}$可以分解为平行于$\boldsymbol{e}$的分量$\boldsymbol{p}_{/\!/}$和垂直于$\boldsymbol{e}$的分量$\boldsymbol{p}_\perp$,即

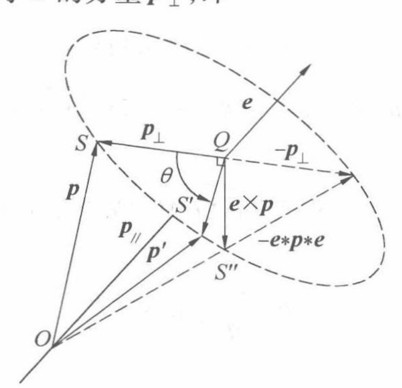


图 A.4 绕指定方向轴线的旋转

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_{/\!/}+\boldsymbol{p}_\perp \tag{46}$$

$$\boldsymbol{p}_{/\!/}=(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}+\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p})*\boldsymbol{e}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}) \tag{47}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_\perp=\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{e})=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}-\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p})= \\ \frac{1}{4}[\boldsymbol{e}*(\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}-\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p})-(\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}-\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p})*\boldsymbol{e}]= \\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}) \end{aligned} \tag{48}$$

由式(46)、(47)可知

$$-\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}=2\boldsymbol{p}_{/\!/}-\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_{/\!/}-\boldsymbol{p}_{\perp}$$

这表示$-\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}$是$\boldsymbol{p}_{/\!/}$和$\boldsymbol{p}_{\perp}$反向后合成,即$-\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}$与$\boldsymbol{p}$关于$\boldsymbol{e}$轴对称。$\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}$是$\boldsymbol{p}$在以$\boldsymbol{e}$为法向的镜面反射后形成的矢量。矢量$\boldsymbol{p}$与转轴$\boldsymbol{e}$不垂直时,$\boldsymbol{p}$绕单位向量$\boldsymbol{e}$为方向的直线旋转$\theta$角后变成$\boldsymbol{p}'$,可以看成$\boldsymbol{p}$垂直于$\boldsymbol{e}$的分量$\boldsymbol{p}_{\perp}$绕$\boldsymbol{e}$旋转$\theta$角,然后与$\boldsymbol{p}_{/\!/}$合成为$\boldsymbol{p}'$,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}'&=\boldsymbol{p}_{/\!/}+(\cos\theta+\sin\theta\boldsymbol{e})*\boldsymbol{p}_{\perp}=\\&\frac{1}{2}[(1+\cos\theta)\boldsymbol{p}+\sin\theta\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p}-\sin\theta\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}+(\cos\theta-1)\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}]\end{aligned}\tag{49}$$

可见,此时需要对矢量$\boldsymbol{p}$同时左乘一个规范四元数和右乘其共轭四元数,设

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}'&=(u_0+u_v\boldsymbol{e})*\boldsymbol{p}*(u_0-u_v\boldsymbol{e})=\\&u_0^2\boldsymbol{p}-u_0u_v\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}+u_0u_v\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p}-u_v^2\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}\end{aligned}\tag{50}$$

比较系数可得

$$\begin{cases}u_0^2=\dfrac{1}{2}(1+\cos\theta)\\u_0u_v=\dfrac{1}{2}\sin\theta\\u_v^2=\dfrac{1}{2}(\cos\theta-1)\end{cases}$$

解此方程得到一组解

$$\begin{cases}u_0=\cos\dfrac{\theta}{2}\\u_v=\sin\dfrac{\theta}{2}\end{cases}$$

记

$$\boldsymbol{u}=\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e},\boldsymbol{u}^*=\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}\tag{51}$$

则$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{u}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{u}^*$,表示矢量$\boldsymbol{p}$绕$\boldsymbol{e}$旋转$\theta$角得到$\boldsymbol{p}'$。如果将$\boldsymbol{u}$换为$-\boldsymbol{u}$,因$(-\boldsymbol{u})^*=-\boldsymbol{u}^*$,故旋转算子$(-\boldsymbol{u})*()*(-\boldsymbol{u})^*$和$\boldsymbol{u}*()*\boldsymbol{u}^*$得出相同的结果,实际上,因为

$$-\boldsymbol{u}=\cos\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)(-\boldsymbol{e})$$

表示绕$-\boldsymbol{e}$轴旋转$2\pi-\theta$,故结果相同。如果规范四元数$\boldsymbol{u}_i$给出以角度θ_i绕轴$\boldsymbol{e}_i$旋转,规范四元数$\boldsymbol{u}_j$给出以角度θ_j绕轴$\boldsymbol{e}_j$旋转,则顺序旋转$\boldsymbol{u}_i$和$\boldsymbol{u}_j$相应与算子

$$\boldsymbol{u}_j*\boldsymbol{u}_i*()*\boldsymbol{u}_i^**\boldsymbol{u}_j^*=(\boldsymbol{u}_j*\boldsymbol{u}_i)*()*(\boldsymbol{u}_i^**\boldsymbol{u}_j^*)\tag{52}$$

因为$\boldsymbol{u}_j*\boldsymbol{u}_i$也是规范四元数,如令

$$\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{u}_j*\boldsymbol{u}_i=\cos\frac{\theta_k}{2}+\sin\frac{\theta_k}{2}\boldsymbol{e}_k\tag{53}$$

则两次顺序旋转的结果,可以用角度θ_k绕$\boldsymbol{e}_k$一次旋转等价。

研究一种特殊旋转:设$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}$,即$\boldsymbol{u}=\cos\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{\pi}{2}\boldsymbol{e}$,则转角为$\pi$,且$\boldsymbol{u}^*=\cos\dfrac{\pi}{2}-\sin\dfrac{\pi}{2}\boldsymbol{e}=-\boldsymbol{e}$,所以$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{u}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{u}^*=-\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}$,如图(A.4)所示,变换$-\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}$表示相对于$\boldsymbol{e}$轴对称的矢量,而变换$\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}$给出矢量$-\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}$相反的矢量,故变换$\boldsymbol{e}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}$给出原矢量的镜反射。

附录 B　旋转矩阵与四元数参数转换算法

//旋转矩阵与四元数参数转换

//MatQuatConvert(RotationMatrix m, Quaternion * q)

//判断矩阵 m 是否规范,如果是往下执行

If MatIsNorm(m) then

$q_0 \leftarrow \frac{1}{2}\sqrt{1+r_{11}+r_{22}+r_{33}}$

If $q_0 \neq 0$ then

$q_1 \leftarrow r_{32}-r_{23}/4q_0$

$q_2 \leftarrow r_{13}-r_{31}/4q_0$

$q_3 \leftarrow r_{21}-r_{12}/4q_0$

else

$q_0 \leftarrow 0$

$q_1 \leftarrow \frac{1}{2}\sqrt{1+r_{11}-r_{22}-r_{33}}$

$q_2 \leftarrow \frac{1}{2}\sqrt{1+r_{22}-r_{33}-r_{11}}$

$q_3 \leftarrow \frac{1}{2}\sqrt{1+r_{33}-r_{11}-r_{22}}$

If q_1 是(q_1, q_2, q_3)最大值 then

If　m 矩阵中 r_{21}小于零 then

$q_2 \leftarrow -q_2$

end

If　m 矩阵中 r_{31}小于零 then

$q_3 \leftarrow -q_3$

End

else if q_2 是否是(q_2, q_3)中最大值 then

If　m 矩阵中 r_{21}小于零 then

$q_1 \leftarrow -q_1$

end

If　m 矩阵中 r_{32}小于零 then

$q_3 \leftarrow -q_3$

End

else

If　m 矩阵中 r_{13}小于零 then

$q_1 \leftarrow -q_1$

end

If　m 矩阵中 r_{23}小于零 then

```
        q2 ← -q2
        end
    end
end
//四元数规范化
QuatNorm( * q)
end
```

附录 C 动力学基础知识

1. 牛顿第二运动定律(Newton's Second Law)

通常,作用于点质量 m 的力 $\boldsymbol{F}$ 是位置、速度和时间的函数,根据牛顿第二运动定律,一个常质量质点的动力学方程表示为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{r}$ 表示在惯性坐标系下质点的位置矢量。公式(1)可以进一步写为

$$\frac{\mathrm{d}(m\dot{\boldsymbol{r}})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) \tag{2}$$

可见,质点线动量随时间的变化量等于作用于其上的合外力 F。

2. 角动量

如图 C.1 所示,质点的角动量或者动量矩 $\boldsymbol{H}$ 定义为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v} \tag{3}$$

在惯性坐标系{0}下,式(3)两侧对时间微分,并参考公式(2),得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times m\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{N}$$

因此

$$\boldsymbol{N}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

式(4)表示质点角动量随时间的变化量等于作用于其上的力矩 $\boldsymbol{N}$。

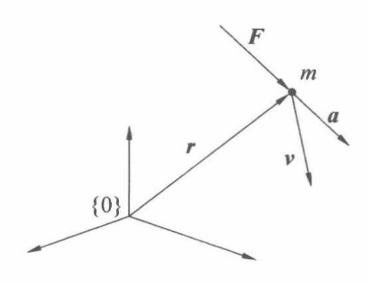


图 C.1 长方体的惯性线量

3. 刚体的惯性矩阵

如图 C.2 所示,刚体可以离散成一系列质点,假定质点 i 的质量为 m_i,那么刚体的总质量以离散的形式定义为

$$m=\sum_i m_i \tag{5}$$

如果刚体的密度函数在笛卡儿坐标系下定义为 $\rho(x,y,z)$,则刚体质量连续的形式定义为

$$m=\int_v \rho\,\mathrm{d}v \tag{6}$$

v 表示质点在三维空间占据的区域，在惯性坐标系{0} 下的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_i$，相对于原点 O，刚体的质量一阶矩(Mass First Moment)$\boldsymbol{q}_O$ 定义为

$$\boldsymbol{q}_O = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i = \int_v \boldsymbol{r}\rho \mathrm{d}v \tag{7}$$

刚体的质心在惯性坐标系下的位置矢量为

$$\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{q}_O}{m} \tag{8}$$

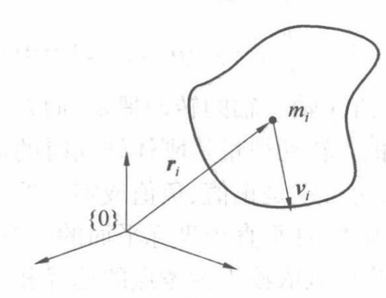


图 C. 2

在惯性坐标系下，刚体的角动量以离散的形式定义为

$$\boldsymbol{H}_O = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \tag{9}$$

假定刚体的角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，则式(9) 写为

$$\boldsymbol{H}_O = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) \tag{10}$$

写成连续的形式为

$$\boldsymbol{H}_O = \int_v \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\rho \mathrm{d}v \tag{11}$$

公式(11)，进一步写为

$$\boldsymbol{H}_O = \int_v \hat{\boldsymbol{r}}(-\hat{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{\omega}\rho \mathrm{d}v = \left[\int_v \hat{\boldsymbol{r}}(-\hat{\boldsymbol{r}})\rho \mathrm{d}v\right]\boldsymbol{\omega} \tag{12}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{r}} \equiv \boldsymbol{r} \times$ 为斜对称矩阵，相对于原点 O，定义质量二阶矩(Mass Second Moment) 为

$$\boldsymbol{I}_O = \int_v \hat{\boldsymbol{r}}(-\hat{\boldsymbol{r}})\rho \mathrm{d}v = \int_v [(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{E} - \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}]\rho \mathrm{d}v \tag{13}$$

式中，$\boldsymbol{E}$ 为 3×3 单位矩阵；$\boldsymbol{I}_O$ 也称为刚体转动惯性矩阵或惯性张量(Inertia Tensor)。令 $\boldsymbol{r} = [x \quad y \quad z]^{\mathrm{T}}$，式(13) 可以展开写为

$$\boldsymbol{I}_O = \int_v \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \rho \mathrm{d}v \tag{14}$$

刚体的转动惯性矩阵可以写为

$$\boldsymbol{I}_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{15}$$

式中

$$I_{xx} = \iiint (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$I_{yy}=\iiint (z^2+x^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$I_{zz}=\iiint (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$I_{xy}=I_{yx}=\iiint (-xy)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$I_{xz}=I_{zx}=\iiint (-xz)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$I_{yz}=I_{zy}=\iiint (-yz)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

式中，I_{xx},I_{yy},I_{zz} 分别为刚体对 x 轴、y 轴，z 轴的转动惯量，而 $I_{xy}=I_{yx},I_{xz}=I_{zx},I_{yz}=I_{zy}$ 分别是刚体对平面 Oxy,Oyz,Ozx 的惯性积。转动惯量是刚体转动时的惯性度量，总是正标量，惯性积可以看成刚体不平衡性的度量，它可以是正值、负值或零。惯性积表征了质量相对坐标系平面分布的不对称性。若为匀质刚体，且垂直于坐标平面的所有截面都是对称图形，其惯性积为零。转动惯量矩阵中的元素的数值依赖于参考点的选择和所建立的坐标系，对于规则的、简单几何体可以通过体积积分计算得到，对于大部分不规则的形状需要通过试验的方法得到。

【例 C.1】 图 C.3 所示为匀质长方体，其长宽高为 a,b 和 c，在其几何中心建立如图C.3所示的坐标系，其密度函数为 $\rho(x,y,z)$，计算其转动惯量矩阵。

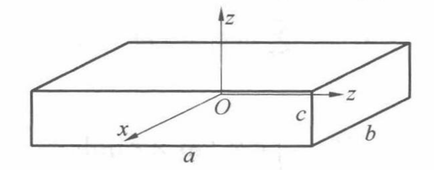


图 C.3 长方体的惯性线量

$$I_{xx}=\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho\frac{abc}{12}(a^2+c^2)$$

同理

$$I_{yy}=\rho\frac{abc}{12}(b^2+c^2),I_{zz}=\rho\frac{abc}{12}(a^2+b^2)$$

刚体对称，其他惯性积为零。

4. 平行轴原理

令 C 点为刚体的质心点，依此为参考点建立一个与惯性参考坐标系 $\{A\}$ 方向一致的坐标系 $\{C\}$，如图 C.4 所示。在此坐标系下，相对于质心点 C 计算得到的刚体转动惯性矩阵为 $\boldsymbol{I}_C$，则相对于点 O 其转动惯量矩阵可以表示为

$$\boldsymbol{I}_A=\boldsymbol{I}_C+m[(\boldsymbol{r}_C{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_C)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{r}_C\boldsymbol{r}_C{}^{\mathrm{T}}] \tag{16}$$

其推导过程可参考公式(13)。

5. 转动惯量矩阵变换

如果在刚体质心点 C 建立局部坐标系 $\{C\}$，相对于 C 点，在坐标系 $\{C\}$ 下，所得到的惯量矩阵为 $\boldsymbol{I}_C$，如果相对点不变，惯量矩阵变换到 $\{A\}$ 坐标系下表达式为

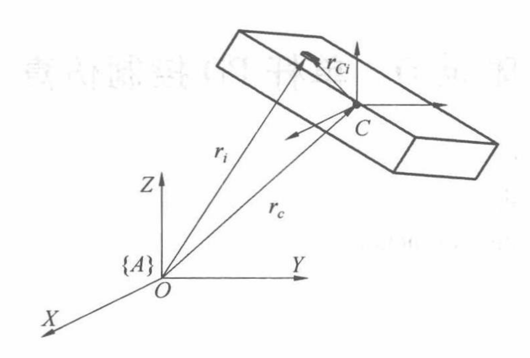


图 C.4　平行轴原理示意图

$$[\boldsymbol{I}_C]_A = \boldsymbol{R}\,[\boldsymbol{I}_C]_C\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

其中，$\boldsymbol{R}$ 表示坐标系 $\{C\}$ 相对于坐标系 $\{A\}$ 的旋转矩阵。

简单证明如下：在坐标系 $\{C\}$ 下，单位质点的位置矢量 ${}^C\boldsymbol{r}$ 变换到坐标系 $\{A\}$ 为

$${}^A\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}{}^C\boldsymbol{r} \tag{18}$$

将式(8) 代入式(13) 得到在坐标系 $\{A\}$ 下的惯性矩阵 $[\boldsymbol{I}_C]_A$ 为

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{I}_C]_A &= \int_v [({}^A\boldsymbol{r}\cdot{}^A\boldsymbol{r})\boldsymbol{E} - {}^A\boldsymbol{r}{}^A\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}]\rho\,\mathrm{d}v = \\
&\int_v \{[(\boldsymbol{R}{}^C\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{R}{}^C\boldsymbol{r})]\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{R}{}^C\boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{R}{}^C\boldsymbol{r})^{\mathrm{T}}\}\rho\,\mathrm{d}v = \\
&\int_v \{[(\boldsymbol{R}{}^C\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{R}{}^C\boldsymbol{r})]\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{R}{}^C\boldsymbol{r})({}^C\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{R}^T)\}\rho\,\mathrm{d}v = \\
&\boldsymbol{R}\{\int_v [({}^C\boldsymbol{r}\cdot{}^C\boldsymbol{r})\boldsymbol{E} - {}^C\boldsymbol{r}{}^C\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}]\rho\,\mathrm{d}v\}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \\
&\boldsymbol{R}\,[\boldsymbol{I}_C]_C\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

附录 D 单杆 PD 控制仿真

```
% Author:yangxiaojun
% R robot arm Dynamics
% Newton-Euler equation of motion
clear; clc; close;
syms   t
%mechanism variables
a = 1; m = 1; g = 9.81;
%Position vector of mass center
c = cos(sym('q(t)')); s = sin(sym('q(t)'));
xC = (a/2) * c; yC = (a/2) * s; rC = [xC yC 0];
%angular velocity and acceleration
omega = [0 0 diff('q(t)',t)]; alpha = diff(omega,t);
%Gravity
G = [0 -m * g 0];
%inertia
IO = m * a^2/3;
%The PD feedback control law
gama   = 30; beta   = 45; qf = pi/3;
tau = gama * (qf - sym('q(t)')) - beta * (diff('q(t)',t)) + 0.5 * g * a * m * c;
T01 = [0 0 tau];
%the equation of motion
eq   = -IO * alpha + cross(rC,G) + T01;
eqz = eq(3);
%the equation has to be rewritten as a first order system
%(x1 =q and x2 = dq)
slist = {diff('q(t)',t,2),diff('q(t)',t),'q(t)'};
nlist = {'ddq', 'x(2)' , 'x(1)'};
eqI = subs(eqz,slist,nlist);
dx1 = sym('x(2)');
dx2 = solve(eqI,'ddq');
dx1dt = char(dx1);
dx2dt = char(dx2);
fid = fopen('Rrobot.m','w+');
fprintf(fid,'function dx = Rrobot(t,x)\n');
fprintf(fid,'dx = zeros(2,1);\n');
fprintf(fid,'dx(1) = x(2);\n');
```

```
fprintf(fid,'dx(2) = ');
fprintf(fid,dx2dt);
fprintf(fid,';\n');
fclose(fid);
% function in file, not constructing a file as a function
g = inline(sprintf('[%s; %s]', dx1dt, dx2dt), 't', 'x');
% define initial conditions
x0 = [pi/18; 0];
% Runge-kutta integral method
[ts,xs] = ode45(g, 0:0.1:10, x0);
subplot(1,2,1);
plot(ts,xs(:,1)*180/pi,'LineWidth',1.5),...
xlabel('t(s)'), ylabel('\q (deg)'), grid, axis([0, 10, 0, 70])
subplot(1,2,2);
plot(ts,xs(:,2)*180/pi,'LineWidth',1.5),...
xlabel('t(s)'), ylabel('\omega (deg/s)'), grid, axis([0, 10, 0, 70])
fprintf('Results \n'); fprintf('\n');
fprintf('     t(s)      q(rad) omega(rad/s) \n');
[ts,xs];
```

附录E 独立关节控制仿真

```
% Author:yang Xiaojun
% Discrete PID control for continuous plant
% qd -- the desired joint input
% q   ---the actual joint output
% xk -- the state vector(q,dq)
clc; clear all; close all;
kp = 20; kd = 0.5; ki = 300;
ts=0.001;% Sampling time
xk=zeros(2,1);
e_1 = 0; Ie  = 0;
for k = 1:1:1001
    time(k) = (k-1) * ts;
    qd(k)=0.50 * sin(2 * pi * (k-1) * ts);
    q(k)=xk(1);
    e  = qd(k)-q(k);
    de = (e - e_1)/ts;
    Ie = Ie + e * ts;
    Tm(k)=kp * e + kd * de + ki * Ie;
    para=Tm(k);% D/A
    tSpan=[0 ts];
    [tt,xx]=ode45('PlantModel',tSpan,xk,[],para);
    xk = xx(length(xx),:);% A/D
% Control limit
    if Tm(k)>10.0
       Tm(k)= 10.0;
    end
    if Tm(k)<-10.0
       Tm(k)= -10.0;
    end
    e_1 = e;
end
figure(1);
plot(time,qd,'r',time,q,'b--');
xlabel('time(s)'),ylabel('qd,q');
legend('qd','q')
figure(2);
```

```
plot(time,qd-q,'r');
xlabel('time(s)'),ylabel('error');

%独立关节 PD+前馈控制方法仿真
%Author:Yang Xiaojun
%Discrete PD Feedforward controller
clc; clear all; close all;
kp =20; kd = 0.5; J = 0.0067; B = 0.10;
ts=0.001;   %Sampling time
xk=zeros(2,1);
e_1=0;
for k = 1:1:1001
    time(k) = (k-1) * ts;
    qd(k)    = 0.50 * sin(2 * pi * (k-1) * ts);
    dqd(k)   = 0.50 * 2 * pi * cos(2 * pi * (k-1) * ts);
    ddqd(k) = -0.50 * 2 * pi * 2 * pi * sin(2 * pi * (k-1) * ts);
    q(k)    = xk(1);
    dq(k) = xk(2);
    e      = qd(k)-q(k);
    de     = (e-e_1)/ts;
    Tm(k) = kp * e + kd * de + J * ddqd(k) + B * dqd(k);
    para=Tm(k);% D/A
    tSpan=[0 ts];
    [tt,xx]=ode45('PlantModel',tSpan,xk,[],para);
    xk = xx(length(xx),:); % A/D
  %Control limit
    if Tm(k)>10.0
       Tm(k)= 10.0;
    end
    if Tm(k)<-10.0
       Tm(k)= -10.0;
    end
    e_1=e;
end
figure(1);
plot(time,qd,'r',time,q,'b');
xlabel('time(s)'),ylabel('qd,q');
legend('qd','q')
figure(2);
```

```
plot(time,qd-q,'r');
xlabel('time(s)'),ylabel('error');

------------------------------------------------------------------------------------------

function dx = PlantModel(t,x,flag,para)
u=para;J=0.0067;B=0.1;Td = 1;
dx=zeros(2,1);
dx(1) = x(2);
dx(2) = -(B/J) * x(2) + (1/J) * (u - Td);
```

附录 F　PD 计算力矩控制仿真

```
% Author: Yang Xiaojun
% PD control scheme without disturbance
% main function of simulation
% mainCTC. m
clc
clear
ts = 0.001; t = [0 : ts : 10];
m = length(t);
% initial state vector
x = [0.1 0 0 0];
% output joint angle
q1 = [ ]; q2 = [ ];
% tracking error
e_q1 = [ ]; e_q2 = [ ];
% inputing torque
torque_q1 = [ ];torque_q2 = [ ];
% desired input
qd = [ ];qdp = [ ];qdpp= [ ];
% starting
for n = 1:m
[qd qdp qdpp] = SysInp(t(n));
xnadd1 = runkut(qd, qdp, qdpp,t(n),ts,x);
% tracking error
e_q1(n) = qd(1) - x(1);
e_q2(n) = qd(2) - x(2);
% q1 and q2
q1(n) = x(1);
q2(n) = x(2);
% computing the torque
tp = ctl(qd, qdp, qdpp, x);
torque_q1(n) = tp(1);
torque_q2(n) = tp(2);
x = xnadd1;
end
subplot(2,2,1)
plot(t,torque_q1,t,torque_q2)
```

```
legend('joint 1', 'joint 2',2)
title('Torque inputs')
grid on
subplot(2,2,2)
plot(t,q1,t,q2)
legend('joint 1', 'joint 2',2)
title('Joint angle outputs')
grid on
subplot(2,2,3)
plot(t,e_q1,t,e_q2)
legend('joint 1', 'joint 2',2)
title('Tracking errors outputs')
grid on
```

```
%SysInp. m
%compute desired trajectory
%computed-torque control simulation(2R mechanism)
function [qd qdp qdpp] = SysInp(t)
per = 2;g1 = 0.1;g2 = 0.1;fact = 2 * pi/per;
qd(1) = g1 * sin(fact * t);
qd(2) = g2 * cos(fact * t);
qdp(1) = g1 * fact * cos(fact * t);
qdp(2) = -g2 * fact * sin(fact * t);
qdpp(1) = -g1 * fact^2 * sin(fact * t);
qdpp(2) = -g2 * fact^2 * cos(fact * t);
return
```

```
%ctl. m
%computed-torque control (2R mechanism)
%x current state vector
function tp = ctl(qd, qdp, qdpp, x)
ep = [];m1 = 1;m2 = 1;a1 = 1;a2 = 1;g  = 9.8;kp = 100; kv = 20;
%compute traking error
e(1) = qd(1) - x(1);
e(2) = qd(2) - x(2);
ep(1) = qdp(1) - x(3);
ep(2) = qdp(2) - x(4);
```

```
%compution of M, N
M11 = (m1+m2) * a1^2 + m2 * a2^2 + 2 * m2 * a1 * a2 * cos(x(2));
M12 = m2 * a2^2 + m2 * a1 * a2 * cos(x(2));
M21 = m2 * a2^2 + m2 * a1 * a2 * cos(x(2));
M22 = m2 * a2^2;
N1 = -m2 * a1 * a2 * (2 * x(3) * x(4) + x(4)^2) * sin(x(2));
N1 = N1 + (m1 + m2) * g * a1 * cos(x(1)) + m2 * g * a2 * cos(x(1) + x(2));
N2 = m2 * a1 * a2 * x(3)^2 * sin(x(2)) +  m2 * g * a2 * cos(x(1) + x(2));
%computoion of control torque
s1 = qdpp(1) + kv * ep(1) + kp * e(1);
s2 = qdpp(2) + kv * ep(2) + kp * e(2);
t1 = M11 * s1 + M12 * s2 + N1;
t2 = M21 * s1 + M22 * s2 + N2;
tp(1) = t1;
tp(2) = t2;
return
```

```
%arm.m
%robot arm dynamcis subfunction without disturbenc
%x current state vector
%t input torque
function xp = arm(x, t)
m1 = 1;m2 = 1;a1 = 1;a2 = 1;g  = 9.8;
%compution of M
M11 = (m1+m2) * a1^2 + m2 * a2^2 + 2 * m2 * a1 * a2 * cos(x(2));
M12 = m2 * a2^2 + m2 * a1 * a2 * cos(x(2));
M21 = m2 * a2^2 + m2 * a1 * a2 * cos(x(2));
M22 = m2 * a2^2;
%inversion of M
det  =  M11 * M22 - M12 * M21;
MI11 =  M22/det;
MI12 = -M12/det;
MI22 =  M11/det;
%nonlinear terms
N1 = -m2 * a1 * a2 * (2 * x(3) * x(4) + x(4)^2) * sin(x(2));
N1 = N1 + (m1 + m2) * g * a1 * cos(x(1)) + m2 * g * a2 * cos(x(1) + x(2));
N2 = m2 * a1 * a2 * x(3)^2 * sin(x(2)) +  m2 * g * a2 * cos(x(1) + x(2));
%state equation
```

```
xp(1) = x(3);
xp(2) = x(4);
xp(3) = MI11 * (-N1 + t(1)) + MI12 * (-N2 + t(2));
xp(4) = MI12 * (-N1 + t(1)) + MI22 * (-N2 + t(2));
return
------------------------------------------------------------

% funrunkut. m
% main subfunction called by runge-kutta integrator
function  xp = funrunkut(qd, qdp, qdpp,t,x)
% state vector
tpt = ctl(qd, qdp, qdpp,x);
xp = arm(x,tpt);
return
------------------------------------------------------------

% Fourth-order RUNGGE-KUTTA INTEGRATION
function xnadd1 = runkut(qd, qdp, qdpp,t,ts,xn)
% ts       sample period
% xn       x(n) state vector
% xnadd1 x(n+1) state vector
% temp varibales
x1   = [];xp1 = [];
xpn = funrunkut(qd, qdp, qdpp,t,xn);
x1(1:4) = xn(1:4) + 0.5 * ts * xpn(1:4);
t = t + 0.5 * ts;
xp1 = funrunkut(qd, qdp, qdpp,t,x1);
xpn(1:4) = xpn(1:4) + 2 * xp1(1:4);
x1(1:4) = xn(1:4) + 0.5 * ts * xp1(1:4);
xp1 = funrunkut(qd, qdp, qdpp,t,x1);
xpn(1:4) = xpn(1:4) + 2 * xp1(1:4);
x1(1:4) = xn(1:4) +   ts * xp1(1:4);
t = t + 0.5 * ts;
xp1 = funrunkut(qd, qdp, qdpp,t,x1);
xnadd1(1:4) = xn(1:4) +   ts * (xpn(1:4) + xp1(1:4))/6;return
```

参考文献

[1] 任永杰. 测量机器人本体标定技术研究[D]. 天津:天津大学精仪学院,2007.

[2] 谢存禧,李琳. 空间机构设计与应用创新[M]. 北京:机械工业出版社,2008.

[3] 宋维刚. 机器人学-运动学、动力学与控制[M]. 北京:科学出版社,2007.

[4] 蔡自兴. 机器人学[M]. 北京:清华大学出版社,2000.

[5] 熊有伦. 机器人学[M]. 北京:机械工业出版社, 1993.

[6] CRAIG J J. Introduction to robotics: mechanics and control[M]. 3rd ed. 北京:机械工业出版社,2006.

[7] CHOU C K J, KAMEL M. Finding the position and orientation of a sensor on a robot manipulator using quaternions[J]. The Int. J. Robotics Res., 1991, 10(3): 240-254.

[8] DENAVIT J, HARTENBERGR S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices[J]. Trans. ASME J. Appl. Mech., 1955, 23: 215-221.

[9] HARTENBERGR S, DENAVIT J. Kinematic synthesis of linkages[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1964.

[10] LATOMBE J C. Robot motion planning[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[11] SAHA S K. Introduction torobotics[M]. 北京:机械工业出版社,2010.

[12] JORGE ANGELS. Fundamentals of robotic mechanical system: theory, methods and algorithms[M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag Inc., 2002.

[13] CECCARELLI M. Screw axis defined by giulio mozzi in 1763[C]. Proc. Ninth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Milan(4):3187-3190.

[14] HUNT K H. Kinematic geometry of mechanisms[M]. 2nd ed. Oxford: Oxford Science Publications, 1990.

[15] BOTTEMA A, ROTH B. Theoretical kinematics[M]. New York: Dover Books on Engineering. Dover Publications, Inc. Mineola, 1990.

[16] MARK W S. Robot modeling and control[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2006.

[17] TSAI L W. Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators[M]. John Wiley & Sons, Inc., 1999.

[18] DUFFY J. Statics and kinematics with applications to robotics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[19] KHAN W A, KROVI V N, SAHA S K, et al. Recursive kinematics and inverse dynamics for a planar 3R parallel manipulator[J]. ASME J. of Dynamic System, Measurement and Control, 2005, 127(4): 529-536.

[20] GALLARDO J, RICO J M, FRISOLI A. Dynamics of parallel manipulator by means of screw theory[J]. Mechanism and machine theory, 2003, 38(11): 1113-1131.

[21] 哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学[M]. 北京:高等教育出版社,2008.

[22] 唐任远. 现代永磁电机理论与设计[M]. 北京:机械工业出版社,2008.
[23] SICILIANO B. Robotics: modelling, planning and control[M]. New York: Springer-Verlag New York, Inc. ,2006.
[24] DORF R C. 现代控制系统[M]. 8 版. 北京:高等教育出版社,2001.
[25] 黄真,赵永生. 高等空间机构学[M]. 北京:高等教育出版社,2006.
[26] 陆明万,张雄. 从动能定理到第二类拉格朗日方程[J]. 力学与实践,2003,25:66-68.
[27] BAYO J E. Kinematic and dynamic simulation of multibody systems-the real-time challenge [M]. New York: Springer-Verlag, Inc. , 1994.
[28] LEWIS F L. Robot manipulator control theory and practice[M]. 2nd ed. New York: Marcel Dekker Inc. , 2006.
[29] BENJAMIN C KUO, FARID GOLNARAGHI. 自动控制系统[M]. 8 版. 北京:高等教育出版社,2003.
[30] 刘金琨. 先进 PID 控制 Matlab 仿真[M]. 北京:电子工业出版社,2004.
[31] 程国采. 四元素法及其应用[M]. 长沙:国防科技大学出版社,1991.
[32] SHABANA A A. Computational dynamics[M]. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc. , 2001.

名词索引

C

重复定位精度 1.3

D

Denavit-Hartenberg 参数 3.2
Denavit-Hartenberg 坐标系 3.2
单输入单输出控制系统 8.3
笛卡儿坐标型机器人 1.2
递归牛顿欧拉算法 7.2
电机转矩常数 8.3
定位精度 1.3
动力学方程 7.2
动力学方程的结构 7.2
动力学仿真 7.2
动态控制 8.4
独立关节 PID 控制 8.3
独立关节控制 8.3

E

Euler-Rodrigues 参数 2.5
额定负载 1.3
额定速度 1.3
二阶系统 8.1

F

反电势常数 8.3
方向余弦 2.2
分析雅可比矩阵 4.2
复合映射 2.3

G

刚体速度加速度 4.1
工件坐标系 2.1
工具坐标系 2.1
关节变量 3.2
关节控制分辨率 1.3
关节型工业机器人 1.2
关节坐标系 2.1
广义惯性力 7.3
广义主动力 7.3
广义坐标 1.3
轨迹规划 6.1
过阻尼系统 8.1

H

活动度 1.3
环境 1.2

J

机构 1.3
机器人逆运动学 3.4
机器人系统 1.2
机器人系统仿真 7.2
机器人正运动学 3.3
基坐标系 2.1
计算力矩控制 8.4
精度 1.3
静力学 7.1

K

科氏加速度 4.1
可操作性指标 4.2
可达工作空间 1.3
控制器 1.2

L

拉格朗日方程一类 7.3
拉格朗日方程二类 7.3
力螺旋 5.7
连杆长度 3.2
连杆扭角 3.2
连杆偏置 3.2
临界阻尼系统 8.1
路径规划 6.1
螺距 5.2
螺旋的代数和 5.6
螺旋互易积 5.6
螺旋系 5.5
螺旋轴 5.2

N

逆解几何法、代数法 3.4
牛顿-欧拉方程 7.2

O

欧拉-拉格朗日方程 7.3

P

Plücker 坐标 5.1
平移变换 2.4
平移映射 2.3

Q

齐次矩阵逆 2.3
齐次坐标变换 2.4
奇异位形 4.2
前馈控制 8.3
欠阻尼系统 8.1
球面坐标型机器人 1.2

R

RPY 角 2.5
任务 1.2
任务空间 1.3
柔性工作空间 1.3

S

SCARA 机器人 1.2
三次多项式 6.1
数字化控制系统 7.2
瞬时螺旋运动 5.3
四元数 2.5

T

特征多项式 8.3
条件数指标 4.2

W

腕坐标系 2.1
位形空间 1.3
位置描述 2.2

X

性能指标 4.2
旋转变换 2.4
旋转矩阵 2.2
旋转映射 2.3

Y

雅可比矩阵 4.2
雅可比矩阵的变换 4.2
雅可比矩阵几何法 4.2
雅可比矩阵微分法 4.2
雅可比转置 7.1
用户坐标系 2.1
圆柱坐标型机器人 1.2
运动副 1.3
运动链 1.3
运动螺旋 5.4

Z

z-y-z 欧拉角 2.5

执行机构 1.2
直线抛物线混合规划 6.1
置换坐标系 2.1
姿态描述 2.2
自由度 1.3
作用在连杆上的力/力矩 7.1

策划编辑：王桂芝

责任编辑：刘　瑶

封面设计：尹　力

由黑龙江省精品图书出版工程专项资金资助出版

GONGYE JIQIREN JISHU


ISBN 978-7-5603-5247-3

定价：28.00元